

Színezéssel rokon paraméterek viselkedése gráfhatványokban

Tóth Ágnes, V. évf., BME TTK

Témavezető: **Dr. Simonyi Gábor** egyetemi docens
BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

Számos gráfparaméter esetén igaz, hogy a gráf valamilyen szorzás szerinti hatványaiban vizsgálva a paramétert, a kapott értékek megfelelő normálásával nyert sorozat konvergens, a határérték érdekes, új gráfparamétert ad. Egy gráf Shannon kapacitása is ilyen módon származtatható, a klikkszám aszimptotikus növekedéséből.

Egy gráf függetlenségi hányadosa a függetlenségi száma és csúcsszáma hányadosa. Ebből kaphatjuk egy gráf aszimptotikus direkt függetlenségi hányadosát úgy, hogy tekintjük a gráf n -edik hatványát az ún. direkt szorzásra nézve és ennek függetlenségi hányadosát vizsgáljuk n tart végtelen esetén. Az [1] cikkben merült fel a kérdés, hogy milyen gráfokra egyezik meg ez a határérték a gráf függetlenségi hányadosával, ezeket a gráfokat önuniverzálisnak nevezték el. Néhány gráfcsaládra bebizonyították, hogy ilyen tulajdonságúak, de például a teljes többrészes gráfok esete nyitott kérdés maradt. Dolgozatom egyik eredménye, hogy a teljes többrészes gráfok pontosan akkor önuniverzálisak, ha a legnagyobb pontosztályuk mérete legfeljebb a csúcsszám fele.

Érdekes problémához jutunk akkor is, ha ugyanezen gráfszorzásra egy más, hasonló paramétert, a Hall-hányadost vizsgáljuk. Egy gráf Hall-hányadosa a csúcsszáma és a függetlenségi száma hányadosának maximuma a gráf összes részgrádjára nézve. Ebből kapjuk a gráf aszimptotikus direkt Hall-hányadosát. A [2] dolgozatban sejtésként szerepel, hogy ez az érték tetszőleges gráf esetén megegyezik a gráf frakcionális kromatikus számával. A szerző a cikkben perfekt és csúcstranzitív gráfok mellett kerékgráfokra igazolta a sejtést. Dolgozatomban a kerékgráfok általánosításaként belátom, hogy ha egy gráfra igaz a sejtés, akkor a gráfhoz hozzávéve egy pontot, melyet összekötünk a gráf összes többi csúcsával, a sejtés a kapott gráfra is igaz lesz.

Ugyanezen gráfparamétert vizsgálhatjuk az ún. lexikografikus szorzással is, így kaphatjuk a gráf aszimptotikus lexikografikus Hall-hányadosát. A [2] dolgozatban sejtésként szerepel, hogy ez az érték tetszőleges gráf esetén megegyezik a gráf frakcionális kromatikus számával. Dolgozatomban igazolom ezt a sejtést.

Hivatkozások:

- [1] J. I. Brown, R. J. Nowakowski, D. Rall, *The ultimate categorical independence ratio of a graph*, SIAM J. Discrete Math., **9**, 290-300 (1996)
- [2] G. Simonyi, *Asymptotic values of the Hall-ratio for graph powers*, Discrete Mathematics, **306**, 2593-2601 (2006)