

Aszimptotikus approximáció kupongyűjtőknek

Pósfai Anna, V. évf., SzTE TTK

Témavezető: Dr. Csörgő Sándor egyetemi tanár
SzTE Sztohasztika Tanszék

Adva van $n \geq 2$ különböző kupon, melyekből egy kupongyűjtő véletlenszerűen visszatevéses mintát vesz. Adott n -től függő $m_n \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ szám esetén a mintavételt addig folytatja, amíg előszörre pontosan $n - m_n$ különböző kupont nem gyűjtött. A $W_n(m_n)$ véletlen változó, a kupongyűjtő „várakozási ideje”, az ehhez szükséges ismétlések számát jelöli. Aszimptotikus viselkedésére különböző határeloszlástételeket bizonyítottak aszerint, hogy m_n hogyan változik, amint n tart a végtelenbe. Bevezetve az $F_{n,m_n}(x) := P\left(\frac{1}{n}W_n(m_n) - \sum_{k=m_n+1}^n \frac{1}{k} \leq x\right)$, $x \in \mathbb{R}$, jelölést, Erdős és Rényi [3] határozták meg $F_{n,m_n}(x)$ határeloszlását abban az esetben, amikor m_n minden n -re azonosan 0, majd Baum és Billingsley [1] kiterjesztették ezt az eredményt tetszőleges konstans m_n -re. Ugyancsak Baum és Billingsley [1] látták be, hogy ha $(n - m_n)/\sqrt{n} \rightarrow \infty$ és $m_n \rightarrow \infty$, akkor $\frac{W_n(m_n) - \mu_n}{\sigma_n}$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz.

A dolgozatban ezen határeloszlások konvergenciáit vizsgáljuk. Először az $m_n = m$ konstans esetben a konvergenciasebbségre Csörgő [2] által adott $O(\log n/n)$ becslésről látjuk be, hogy nem javítható, és explicit módon definiálunk olyan numerikusan számolható, az egész számegyenesen egyenletesen korlátos $G_{n,m}(x)$ függvényeket, melyekkel minden n -re és minden rögzített m -re az

$$F_{n,m}(x) = F_m(x) + \frac{\log n}{n} G_{n,m}(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

egy tagú aszimptotikus sorfejtés teljesül. Grafikusan is illusztráljuk, hogy az $F_{n,m}(x)$ függvényeknek $F_m(x) + \frac{\log n}{n} G_{n,m}(x)$ -szel való approximációja lényegesen jobb közelítést jelent, mint a határeloszlással történő approximáció. Végül a normális határeloszlású esetben becslést adunk a konvergenciasebbségre.

Hivatkozások

- [1] Baum, L. E., Billingsley, P., *Asymptotic distributions for the coupon collector's problem*, Ann. Math. Statist., **36**, 1835–1839, (1965)
- [2] Csörgő, S., *A rate of convergence for coupon collectors*, Acta Sci. Math. (Szeged), **57**, 337–351, (1993)
- [3] Erdős, P., Rényi, A., *On a classical problem of probability theory*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **6**, 215–220, (1961)