

Szavak száma idempotens félcsoporthokban (Kötegvarietások szabadspektruma)

Pluhár Gabriella, III. évf., ELTE TTK

Témavezető: **Szabó Csaba**, egyetemi docens
ELTE TTK, Alegbra és Számelmélet Tanszék

Legyen adott egy A véges algebra. Az általa generált varietás szabadspektruma ($|F_n(V(A))|$) a varietásban levő, n elem által generált szabad algebra méretét jelenti. Másképpen, a szabadspektrum az A algebra fölötti különböző n -változós kifejezések száma. Közismert, hogy ha $|A| = m$, akkor $n \leq |F_n(V(A))| \leq m^{m^n}$. Például, Boole-algebrák esetén ez a szám pontosan 2^{2^n} . Higman (1965) és Neumann (1963) bebizonyították, hogy egy G véges csoport pontosan akkor nilpotens, ha az általa generált varietás szabadspektrumának logaritmus polinom nagyságú, és ha a csoport nem nilpotens, akkor ez a logaritmus exponenciális.

Félcsoporthokra eddig még kevés eredmény született. Káta és Szabó (2006) kiszámolta azon tíz varietás szabadspektrumát, amelyet kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoporthok generálnak. A dolgozatban idempotens félcsoporthok (kötegek) által generált varietások szabadspektrumát vizsgáljuk. A kötegvarietások tíz végtelen sorozatra oszthatók (Biryukov, Fennemore, Gerhard). Dolgozatunk fő eredménye, hogy pontos képletet adunk azon varietásbeli különböző n -változós kifejezések számának logaritmusára, melyek mind az n változótól függenek. Azt kapjuk, hogy

$$\log p_n(V(A)) = 4 \sum_{m=1}^n \sum_{t=0}^{k-4} \binom{n-m-1}{t} \log m + 2 \log n,$$

ahol k a varietástól függő egész szám. A szabadspektrumnál általában a nagyságrend a döntő. Becslések és számolások után a szabad algebra méretének logaritmusára kötegvarietásokban az adódik, hogy:

$$\log |F_n(V(A))| = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n + O(n^{k-4} \log n).$$

Ezzel egy lépéssel közelebb jutottunk a félcsoporth-varietások szabadspektrumának megismeréséhez. Ez az eredmény meglepő, mert az eddig ismert szabadspektrumok polinom, exponenciális és duplaexponenciális nagyságrendűek voltak, ahol a kitevőben mindig polinomot értünk. A fő kérdés az, hogy létezik-e félcsoporthokra olyan struktúra tétel, amelyet Higman és Neumann adott csoportokra. Még érdekesebb kérdés az, hogy az újfajta szabadspektrum, hogyan illik bele az eddig ismert képbe.