

Parkettázó és spektrális halmazok vizsgálata Fourier analízissel

Móra Péter, IV. évf., BME TTK

Témavezető: Dr. Matolcsi Máté kutató
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

A parkettázó halmazok osztálya természetes módon merül fel a matematika számos területén, számelméletben, geometriában, Fourier-analízisben. Ezek azok a halmazok, amelyeknek elcsúsztatott (de el nem forgatott) példányaival a „tér” egyrétűen lefedhető (nullmértékű hézagoktól eltekintve). A „tér” általánosan egy lokálisan kompakt Ábel-csoportot jelent, amelyek közül mi a véges csoportokkal, az egész koordinátájú pontok rácsával, valamint az Euklideszi térrel fogunk foglalkozni. A spektrális halmazok osztályát eredetileg Euklideszi terekben vezette be Fuglede a '70-es években (az eredeti motiváció a változók szerinti parciális differenciálások operátorainak egy kiterjesztési kérdése volt, amellyel azonban csak említés szintjén foglalkozunk a dolgozatban). Később világossá vált, hogy érdemes a spektrális halmazokat szintén nagyobb általánosságban, lokálisan kompakt Ábel-csoportokban definiálni. A spektralitás azt jelenti, hogy a csoport karakterei közül kiválaszthatunk néhányat úgy, hogy azokat az adott halmazra megszorítva a halmaz feletti L^2 tér ortogonális bázisát kapjuk. Fuglede azt a sejtést fogalmazta meg 1974-ben, hogy egy halmaz pontosan akkor parkettáz, ha spektrális.

A Fuglede sejtés egészen 2003-ig nyitott volt, amikor T. Tao olyan 5-dimenziós halmazt tudott mutatni, amely spektrális, de nem parkettáz. Később Tao konstrukcióját megjavítva M. Kolountzakis és M. Matolcsi 3-dimenziós példát tudtak adni. A sejtés másik irányát szintén Kolountzakis és Matolcsi tudta megcáfolni 2004-ben, amikor olyan 5-dimenziós halmazt konstruáltak, amely parkettáz, de nem spektrális. Módszerükkel később B. Farkas és Sz. Révész 4-dimenziós ellenpéldát is talált. Jelen dolgozatom célja az, hogy bemutassam B. Farkassal és M. Matolcsival végzett azon kutatásaink eredményét, amelyek egy 3-dimenziós parkettázó, de nem spektrális halmaz konstrukciójához vezettek. Mellékeredményként megmutatom továbbá, hogy J. Lagarias egy elégséges feltétele egy halmaz univerzális spektrumának létezésére nem szükséges (ellentétben Lagarias ilyen irányú sejtésével).

A dolgozatban a parkettázó és spektrális halmazok tulajdonságainak vizsgálatára és a Kolountzakis-Matolcsi módszer elemzésére elsősorban Fourier-analízisbeli eszközöket használunk, míg a konkrét példák megtalálásánál számítógépes programokat hívunk segítségül. Mivel a felmerülő kérdések többségére nem ismert gyors algoritmus, a programozási feladatok megoldása távolról sem triviális. Említést teszek azokról a numerikus kísérletekről is, amelyeket 1-dimenzióban végeztem a Fuglede sejtéssel kapcsolatban. A dolgozatban megpróbálom elkülöníteni a közös kutatás során elért saját eredményeimet.