

Feltételes szélsőérték problémák szakaszonként sima egyenlőségi korlátozásokkal

Makó Judit, V. évf., DE TTK

Témavezető: Dr. Páles Zsolt egyetemi tanár
DE Analízis Tanszék

Legyenek X, Y és Z normált terek, $D \subseteq X$ egy nyílt részhalmaz, legyenek $f_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow Z$ és $F : D \rightarrow Y$ adott függvények és $Q \subseteq Z$ adott halmaz. Tekintsük a

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} f_0(x) \longrightarrow \min \\ f(x) \in Q, \quad F(x) = 0 \end{cases}$$

feltételes szélsőérték problémát. Fő eredményünk $(\mathcal{P})$ probléma megoldásaira vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt ad szakaszonként sima függvényekkel megadott egyenlőtlenség és egyenlőségi korlátozások esetén.

1. Tétel. Legyen X, Y Banach-tér, Z normált tér, $D \subseteq X$ egy nyílt részhalmaz és $Q \subseteq Z$ olyan zárt, konvex kúp, amelynek a belseje nem üres. Legyenek $f_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1, \dots, f_l : D \rightarrow Z$ és $F_1, \dots, F_k : D \rightarrow Y$ adott folytonos függvények és legyen $F \in \text{sel}_C\{F_1, \dots, F_k\}$, $f \in \text{sel}_C\{f_1, \dots, f_l\}$, és tegyük fel, hogy f lokálisan Lipschitz folytonos az x_* pontban. Tegyük fel, hogy x_* egy megoldása a $(\mathcal{P})$ -nak továbbá, hogy

1. f_0 folytonosan Fréchet szerint differenciálható az x_* pontban;
2. $f_1, \dots, f_l$ erősen Gâteaux szerint differenciálhatók az x_* pontban;
3. $F_1, \dots, F_k$ erősen Fréchet szerint differenciálhatók az x_* pontban;
4. bármely $\nu_j \in [0, 1]$ ($j \in I_{x_*}(F)$) együtthatórendszer esetén, amelyre teljesül $\sum_{j \in I_{x_*}(F)} \nu_j = 1$, a $\sum_{j \in I_{x_*}(F)} \nu_j F'_j(x_*)$ operátor képtere zárt.

Ekkor léteznek olyan $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $z_i^* \in Q^*$ ($i \in I_{x_*}(f)$), továbbá $y^* \in Y^*$ nem mind nulla Lagrange-multiplikátorok, és léteznek olyan $\nu_j \in [0, 1]$ ($j \in I_{x_*}(F)$), amelyekre $\sum_{j \in I_{x_*}(F)} \nu_j = 1$, hogy

$$z_i^* \circ f(x_*) = 0, \quad \text{ha } i \in I_{x_*}(f),$$

$$\lambda_0 f'_0(x_*) + \sum_{i \in I_{x_*}(f)} z_i^* \circ f'_i(x_*) + y^* \circ \left(\sum_{j \in I_{x_*}(F)} \nu_j F'_j(x_*) \right) = 0.$$