

Cantor-típusú halmazok dimenziói

Gselmann Eszter, V. évf. matematikus, DE TTK

Témavezető: **Dr. Maksa Gyula** egyetemi docens
DE Analízis Tanszék

Jelen dolgozatban az úgynevezett Cantor-típusú halmazok legfontosabb tulajdonságait és dimenzióit ismertetjük.

Matematikai tanulmányainkból már jól ismert az alábbi

$$C = \left\{ x \in [0, 1] \mid \text{létezik olyan } (\varepsilon_n) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2\}, \text{ melyre } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n} \right\}$$

Cantor-halmaz. Ismeretesebb továbbá ezen halmaz tulajdonságai is. Nevezetesen, hogy kontinuum számosságú, kompakt, Lebesgue-mértéke nulla és nem tartalmaz intervallumot. Felvetődik ezért a kérdés, hogy megadva egy olyan (λ_n) szigorúan monoton csökkenő, pozitív tagú nullsorozatot, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = L < \infty$ teljesül – mint például a $(\lambda_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ esetben – a sorozat által meghatározott

$$C((\lambda_n)) = \left\{ x \in [0, L] \mid \text{létezik olyan } (\varepsilon_n) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, \text{ melyre } x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n \right\}$$

halmaz milyen, a Cantor-halmaz fent említett tulajdonságaihoz analóg tulajdonságokkal rendelkezik.

Vizsgálataink során kiderült, hogy ebben a témakörben kulcsfontosságú szerep jut az intervallum-kitöltő sorozatoknak. Ha ugyanis a szóban forgó (λ_n) sorozat intervallum-kitöltő sorozat, akkor az általa meghatározott $C((\lambda_n))$ halmaz egy kompakt intervallum.

A nem intervallum-kitöltő sorozatok közül először a mértani sorozatokat tekintettük, azaz ha $(\lambda_n) = \left(\frac{1}{q^n}\right)$, ahol $q > 2$. Sikeresen megmutatnunk, hogy ekkor ezen sorozat által meghatározott halmaz kontinuum számosságú, kompakt, Lebesgue-mértéke nulla és nem tartalmaz intervallumot.

Majd megvizsgáltuk azt az esetet is, melyben a (λ_n) sorozat Cantor-típusú sorozat, és igazoltuk, hogy ilyen típusú sorozatok által meghatározott halmazok is rendelkeznek a fent említett tulajdonságok mindegyikével.

A dolgozatban továbbá ismertetjük először mértani sorozatok, majd Cantor-típusú sorozatok által meghatározott halmazok dimenzióit is.

Legvégül pedig az úgynevezett általános esetet és annak nehézségeit mutatjuk be, melyben a szóban forgó (λ_n) sorozatról csak azt tesszük fel, hogy nem intervallum-kitöltő sorozat.