

# Egy Komornik Vilmos által bevezetett integrálfogalom vizsgálata

Backhausz Ágnes, IV. évf., ELTE TTK

Témavezető: **Szilágyi Tivadar** egyetemi docens  
ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tan-  
szék

A széles körben ismert Riemann-integrál számos általánosítása mellett született olyan integrálfogalom is, mely szűkítette az integrálható függvények körét. Dieudonné például azokat az intervallumon értelmezett valós függvényeket tekintette integrálhatónak, melyek megkaphatók lépcsősfüggvények sorozatának egyenletes limeszeként, lépcsősfüggvényen véges sok intervallum karakterisztikus függvényének lineáris kombinációját értve. Ezek éppen azok a függvények, melyeknek minden szakadási pontjuk elsőfajú, azaz az intervallum minden pontjában véges bal- és jobboldali határértékkel rendelkeznek.

Ezt a definíciót több dimenzióra általánosítva még egy kör karakterisztikus függvénye sem integrálható. Ezért Komornik Vilmos enyhítette a konvergencia feltételét: egy többdimenziós téglán értelmezett valós függvényekből álló sorozat akkor konvergál egy adott függvényhez, ha a sorozat egyenletesen korlátos, és minden pozitív számhoz van véges sok téglák, melyek összterfoglata e számnál kisebb, és amelyek unióján kívül a konvergencia egyenletes. Komornik Vilmos bizonyította, hogy értelmes fogalmat kaphatunk, ha a lépcsősfüggvények sorozatának ilyen értelemben vett limeszeként előálló függvényeket nevezzük integrálhatónak. Azt is igazolta, hogy éppen a Jordan-mérhető halmazok azok, melyek karakterisztikus függvénye integrálható. A dolgozatban szerepel az integrálható függvények szakadási pontjaikkal és korlátosságukkal való jellemzése, az elsőfajú szakadás fogalmának egy lehetséges többdimenziós kiterjesztésével.

Az integrálható függvények szakadási pontjainak vizsgálatával újabb bizonyítást kaphatunk Komornik Vilmos Jordan-mérhető halmazokra vonatkozó eredményére. További tulajdonságok igazolásához a Riemann-féle integrálfogalommal való összehasonlítás ad segítséget. A dolgozat másik fő eredménye az integrálható függvények integrálfüggvényeinek jellemzése téglák halmazán értelmezett függvények pontbeli erős differenciálhatósága alapján.