

# Függelék

## a fizikai kémia laboratóriumi gyakorlatokhoz

### Tartalomjegyzék

1. Relatív atomtömegek	2
2. A számítások során előforduló állandók értékei	2
3. A kalomel referenciaelektrod elektrodpotenciáljának hőmérséklet- és koncentrációfüggése	3
4. KCl-oldatok fajlagos vezetése különböző hőmérsékleteken és koncentrációknál	3
5. A víz sűrűségének hőmérsékletfüggése	3
6. A koncentrációk szorzatával kifejezett víziionszorzat hőmérséklet- és ionerősségfüggése	4
7. Keményítőoldat készítése	4
8. Adatok szórása	5
9. A hiba-, ill. szórásterjedés számítása	5
10. Illesztett egyenes meredeksége, tengelymetszete és ezek statisztikai jellemzői. Az Excel használata az illesztett paraméterek meghatározására.	7
10.1. Trendvonal felvétele . . . . .	10
10.2. LIN.ILL függvény használata . . . . .	10
10.3. Regresszió számítás . . . . .	10
10.4. A Solver bővítmény használata . . . . .	12
11. Műszaki-tudományos ábrák készítése	15

# 1. Relatív atomtömegek

**Az elemek periódusos rendszere**

1	IA	1	2	18	VIIIA
1		H		He	
1		1,0079 hidrogén		4,0026 hélium	
2	2	2	3	10	10
	IIA	Li	Be	B	C
		6,941 lítium	9,0122 berillium	10,811 bór	12,011 szén
				N	O
				14,007 nitrogén	15,999 oxigén
				F	Ne
				18,998 fluor	20,180 neon
3		11	12	13	14
		Na	Mg	Al	Si
		22,990 nátrium	24,305 magnézium	26,982 alumínium	28,086 szilícium
4		19	20	31	32
		K	Ca	Ga	Ge
		39,098 kálium	40,078 kalcium	69,723 gallium	72,61 germánium
5		37	38	49	50
		Rb	Sr	In	Sn
		85,468 rubídium	87,62 stroncium	114,82 indium	118,71 ón
6		55	56	81	82
		Cs	Ba	Tl	Pb
		132,91 cézium	137,33 bárium	204,38 tallium	207,2 ólom
7		87	88	111	
		Fr	Ra	Ds	Rg
		(223) francium	(226) rádium	(280) darmstadtium	(280) röntgenium

† lantanoidák

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
140,12 cérium	140,91 praezodími-um	144,24 neodímium	(145) prométium	150,36 szamárium	151,96 európium	157,25 gadolinium	158,93 terbium	162,50 diszprózi-um	164,93 holmium	167,26 erbio	168,93 tulium	173,04 itterbium	174,97 lutécium

‡ aktinoidák

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
Th*	Pa*	U*	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr
232,04 tórium	231,04 protaktíni-um	238,03 urán	(237) neptunium	(244) plutónium	(243) amerícium	(247) kürium	(247) berkélium	(251) kalifornium	(252) einsteini-um	(257) fermium	(258) mendelévi-um	(259) nobélium	(262) laurencium

\* Azoknak az elemeknek, amelyeknek nincs stabilis izotópjuk, a relatív atomtömegük nem adható meg. Ezen elemek esetében a leghosszabb élettartamú izotópjuk tömegszámát adtuk meg zárójelben. Ez alól három elem kivétel (a Th, Pa és U), mert ezeknek jellemző összetétele van a földkéregben, ezért a relatív atomtömegük megadható.

# 2. A számítások során előforduló állandók értékei

Jel	Érték	Név vagy leírás
$c^0$	1 M	standard koncentráció
F	96485 C/mol	Faraday-állandó
$p_0$	101325 Pa	1 atm nyomás SI-mértékegységben kifejezve
$p^0$	$10^5$ Pa	standard nyomás
R	$8,314 \frac{J}{molK}$	egyetemes gázállandó
$T_0$	$-273,15^\circ C$	abszolút nulla fok

### 3. A kalomel referenciaelektrod elektrodpotenciáljának hőmérséklet- és koncentrációfüggése

A kalomel elektrod elektrodpotenciálját ( $E_{\text{cal}}$ , vs. SHE)  $\pm 0,1$  mV-os pontossággal lehet kiszámolni különböző KCl koncentrációknál a  $0 - 50$  °C-os tartományban a

$$E_{\text{cal}} = E^{25^\circ\text{C}} - \sum_{i=1}^3 a_i \cdot (t - 25^\circ\text{C})^i$$

képlettel, ahol  $t$  a hőmérséklet °C-ban kifejezve és az  $E^{25^\circ\text{C}}$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , valamint  $a_3$  empirikus állandók a következők:

[KCl]/M	lg([KCl]/M)	$E^{25^\circ\text{C}}/\text{V}$	$a_1/(\text{V}/^\circ\text{C})$	$a_2/(\text{V}/^\circ\text{C})$	$a_3/(\text{V}/^\circ\text{C})$
0,1	-1	0,3337	$8,75 \cdot 10^{-5}$	$3,00 \cdot 10^{-6}$	0
1,0	0	0,2801	$2,75 \cdot 10^{-4}$	$2,50 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-9}$
3,5	0,5441	0,2500	$4,00 \cdot 10^{-4}$	0	0
5,15*	0,7114	0,2412	$6,61 \cdot 10^{-4}$	$1,75 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-10}$

\* A telített KCl-oldat koncentrációja  $25$  °C-on.

Amennyiben a KCl-oldat  $25$  °C-on mért koncentrációja nem egyezik meg a táblázatban megadott értékekkel, akkor a négy empirikus állandó értékét a koncentráció logaritmusának függvényében interpolálni kell. Pl., ha  $[\text{KCl}] = 0,5$  M, akkor a koncentráció 10-es alapú logaritmus  $-0,3010$ , így a

$$\frac{-0,301 - (-1)}{0 - (-1)} = \frac{E^{25^\circ\text{C}} - 0,3337}{0,2801 - 0,3337} = \frac{a_1 - 8,75 \cdot 10^{-5}}{2,75 \cdot 10^{-4} - 8,75 \cdot 10^{-5}} = \frac{a_2 - 3,00 \cdot 10^{-6}}{2,50 \cdot 10^{-6} - 3,00 \cdot 10^{-6}} = \frac{a_3 - 0}{4 \cdot 10^{-9} - 0}$$

egyenleteket kell megoldani ahhoz, hogy  $E^{25^\circ\text{C}}$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , valamint  $a_3$  megfelelő értékeit megkapjuk.

### 4. KCl-oldatok fajlagos vezetése különböző hőmérsékleteken és koncentrációknál

$t/^\circ\text{C}$	18	19	20	21	22	23	24
0,01 M KCl	0,001225	0,001251	0,001278	0,001305	0,001332	0,001359	0,001386
0,1 M KCl	0,01119	0,01143	0,01167	0,01191	0,01215	0,01239	0,01264
1,0 M KCl	0,09822	0,10014	0,10207	0,10400	0,10554	0,10789	0,10984
$t/^\circ\text{C}$	25	26	27	28	29	30	
0,01 M KCl	0,001413	0,001441	0,001468	0,001496	0,001524	0,001552	
0,1 M KCl	0,01288	0,01313	0,01337	0,01362	0,01387	0,01412	
1,0 M KCl	0,11180	0,11377	0,11524	-	-	-	

A táblázatban a fajlagos vezetés  $\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$  mértékegységben van megadva és a koncentráció  $25$  °C-ra vonatkozik.

### 5. A víz sűrűségének hőmérsékletfüggése

Öt tizedesjegy pontossággal megadja a víz sűrűségét  $\text{g}/\text{cm}^3$  mértékegységben, adott  $t$  (°C-ban megadott) hőmérsékleten a

$$\rho_v(t) = 1,00026 - 5,08692 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$$

tapasztalati képlet a  $15$  °C  $\leq t \leq 35$  °C tartományban.

Amennyiben más hőmérséklet tartomány szükséges, akkor a következő (jóval bonyolultabb) empirikus összefüggést kell használni:

$$\rho_v(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot t^i,$$

ahol számolásakor a következő empirikus adatokat kell behelyettesíteni:

tartomány értékes tizedes jegy $n$	0–55 °C	0–31 °C	0–55 °C	0–100 °C
	4	6	5	5
	3	5	5	10
$a_0$	0,99987	0,9998406403	0,9998419163	0,99984014
$a_1$	$5,291 \cdot 10^{-05}$	$6,801284 \cdot 10^{-05}$	$6,694929 \cdot 10^{-05}$	$6,8755 \cdot 10^{-05}$
$a_2$	$-7,47 \cdot 10^{-06}$	$-9,11644 \cdot 10^{-06}$	$-8,91382 \cdot 10^{-06}$	$-9,3732 \cdot 10^{-06}$
$a_3$	$3,36 \cdot 10^{-08}$	$1,02356 \cdot 10^{-07}$	$8,77509 \cdot 10^{-08}$	$1,38951 \cdot 10^{-07}$
$a_4$	–	$-1,22323 \cdot 10^{-09}$	$-7,80638 \cdot 10^{-10}$	$-3,87034 \cdot 10^{-09}$
$a_5$	–	$8,11007 \cdot 10^{-12}$	$3,35582 \cdot 10^{-12}$	$1,152421 \cdot 10^{-10}$
$a_6$	–	–	–	$-2,552887 \cdot 10^{-12}$
$a_7$	–	–	–	$3,700248 \cdot 10^{-14}$
$a_8$	–	–	–	$-3,290154 \cdot 10^{-16}$
$a_9$	–	–	–	$1,623754 \cdot 10^{-18}$
$a_{10}$	–	–	–	$-3,3993 \cdot 10^{-21}$

Pl., ha 54 °C-on van szükségünk a víz sűrűségére 4 tizedes jegy pontossággal, akkor ez a

$$\rho_v(t) = 0,99987 + 5,291 \cdot 10^{-05} \cdot 54 - 7,47 \cdot 10^{-06} \cdot 54^2 + 3,36 \cdot 10^{-08} \cdot 54^3 = 0,9862 \text{g/cm}^3$$

módon számolható.

## 6. A koncentrációk szorzatával kifejezett víziionszorzat hőmérséklet- és ionerősségfüggése

A víziionszorzat negatív logaritmusát két tizedes jegy pontossággal megadja adott  $t$  hőmérsékleten (°C-ban megadva) és  $I$  (25 °C-ra vonatkozó) ionerősségnél a

$$\text{pK}_v = 13,99 - 1,02 \cdot \sqrt{I} - 0,0343 \cdot (t - 25)$$

tapasztalati képlet a  $15^\circ\text{C} \leq t \leq 30^\circ\text{C}$  tartományban és 0,05 M-nál kisebb ionerősségeknél.

## 7. Keményítőoldat készítése

Kb.  $100 \text{ cm}^3 \sim 0,5\%$ -os keményítő oldat készítéséhez 0,1 g szalicilsavat oldunk  $100 \text{ cm}^3$  forrásban lévő desztillált vízben egy  $\sim 250 \text{ cm}^3$ -es Erlenmeyer-lombikban. Egy kémcsőben  $\sim 0,5 \text{ g}$  burgonyakeményítőt kb.  $10 \text{ cm}^3$  desztillált vízzel összerázunk, majd ezt a forrásban lévő szalicilsav oldatba öntjük. Az oldatot addig forraljuk, amíg az áttetszően opalizáló nem lesz (ez nem több, mint két perc). Ezután az oldatot lehűtjük, és vattapamacsra leszűrjük. Az így kapott keményítőoldat hűtőszekényben tárolva kb. két hónapig áll el. Kukoricakeményítővel dolgozva ugyanez az eljárás, de a keményítőoldat két hét után már nem használható. Amennyiben a keményítőoldatot hamar (4–5 napon belül) felhasználjuk, akkor a fenti eljárásból a szalicilsav kimaradhat, de minden egyebet ugyanúgy kell végezni.

## 8. Adatok szórása

Több gyakorlaton előfordul, hogy ugyanazt az értéket, pl. egy sebességi együtthatót több mérésből is meghatározunk. Ezek az értékek mérési és egyéb bizonytalanságok miatt általában nem egyeznek meg teljesen. Tegyük fel, hogy  $m$ -szer mértünk meg egy értéket és a  $j$ -edik adatot jelöljük  $z_j$ -vel. Ekkor a legvalószínűbb értéknek az egyedi adatok számtani átlagát tekintjük, amelynek értéke ( $\bar{z}$ ), valamint szórása ( $\sigma_{\bar{z}}$ ) a következő képletekkel adhatók meg:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{j=1}^m z_j}{m} \quad \text{és} \quad \sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (z_j - \bar{z})^2}{m-1}} = \sqrt{\frac{m \cdot \sum_{j=1}^m z_j^2 - \left(\sum_{j=1}^m z_j\right)^2}{m \cdot (m-1)}}.$$

Például az MS Office Excel-ben ezek az értékek az *ÁTLAG* és a *SZÖR.M* függvények segítségével számolhatók. Más táblázatkezelőben a képlet alapján keressék meg a megfelelő függvényeket.

## 9. A hiba-, ill. szórásterjedés számítása

A hibaterjedés (pontosabban a szórásterjedés, de ezt a fogalmat beszédben ritkán használjuk) számítása gyakori feladat az értékeléskor. Sokak számára csak az alpműveletekre alkalmazható leegyszerűsített szabály ismert: a szórások abszolút értékét kell összeadni összeadás és kivonás esetén, míg szorzásnál és osztásnál a szórások relatív értékei adandóak össze. Ez az eljárás azonban mindig túlbecsüli az eredmény szórását és a legegyszerűbb elemi függvényekre (pl. négyzetgyök, logaritmus) sem alkalmazható. A következőkben azokat a képleteket adjuk meg levezetések nélkül, amelyek segítségével a szórás számítása korrekt módon elvégezhető.

Tételezzük fel, hogy van két adatunk, amelyeknek a szórása is ismert:  $X \pm \sigma_X$  és  $Y \pm \sigma_Y$ . Ezen adatok valamelyikének vagy mindkettőnek a felhasználásával akarunk egy eredményt ( $Z$ ) kiszámolni és tudni akarjuk  $Z$  szórását ( $\sigma_Z$ ) is. Az 1. táblázatban összefoglaljuk, hogy az alpműveletek és a legfontosabb függvénytranszformációk esetén milyen képletek alkalmazásával lehet az eredmény szórását megadni. Ha az eredmény több alpművelet vagy függvénytranszformáció alkalmazását igényli, akkor a táblázatban megadott képleteket egymás után többször alkalmazva juthatunk el a végeredményhez. Például:

$$\begin{aligned} \ln(2,0 \pm 0,1) + (0,4 \pm 0,02)^{0,5} &= \left( \ln 2 \pm \frac{0,1}{2} \right) + (0,4^{0,5} \pm (|0,5 \cdot 0,02 \cdot 0,4^{-0,5}|)) \\ &= (0,693 \pm 0,050) + (0,632 \pm 0,016) \\ &= (0,693 \pm 0,632) + \left( \sqrt{0,05^2 \pm 0,016^2} \right) \\ &= \underline{\underline{1,34 \pm 0,05}} \quad (\text{vagy } \underline{\underline{1,336 \pm 0,052}}) \end{aligned}$$

1. táblázat. A szórás számítása az alpműveletek és a legfontosabb függvénytranszformációk esetén. A következő képletekben  $a$ -val jelöljük az állandó, szórás nélküli értékeket, és a trigonometrikus függvényeknél a szög és a szórása is radiánban értendő. A többi jelölés magyarázatát lásd a szövegben.

művelet vagy függvény	eredmény szórással ( $Z \pm \sigma_Z$ )	példa
szorzás $a$ -val	$(a \cdot X) \pm ( a \cdot \sigma_X )$	$3 \cdot (1,2 \pm 0,3) = (3 \cdot 1,2) \pm (3 \cdot 0,3) = \underline{\underline{3,6 \pm 0,9}}$
összeadás	$(X + Y) \pm \left( \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \right)$	$(2,2 \pm 0,3) + (8,4 \pm 0,5) =$ $= (2,2 + 8,4) \pm \left( \sqrt{0,3^2 + 0,5^2} \right) = \underline{\underline{10,6 \pm 0,6}}$
kivonás	$(X - Y) \pm \left( \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \right)$	$(3,2 \pm 0,3) - (2,4 \pm 0,5) =$ $= (3,2 - 2,4) \pm \left( \sqrt{0,3^2 + 0,5^2} \right) = \underline{\underline{0,8 \pm 0,6}}$
szorzás	$(X \cdot Y) \pm \left( \sqrt{Y^2 \cdot \sigma_X^2 + X^2 \cdot \sigma_Y^2} \right)$	$(2,2 \pm 0,2) \cdot (8,4 \pm 1,0) =$ $= (2,2 \cdot 8,4) \pm \left( \sqrt{8,4^2 \cdot 0,2^2 + 2,2^2 \cdot 1,0^2} \right) = \underline{\underline{18,5 \pm 2,8}}$
osztás	$\left( \frac{X}{Y} \right) \pm \left( \sqrt{\frac{Y^2 \cdot \sigma_X^2 + X^2 \cdot \sigma_Y^2}{Y^4}} \right)$	$(22,0 \pm 2,0) / (8,4 \pm 1,0) =$ $= \frac{22,0}{8,4} \pm \left( \sqrt{\frac{8,4^2 \cdot 2,0^2 + 22,0^2 \cdot 1,0^2}{8,4^4}} \right) = \underline{\underline{2,6 \pm 0,4}}$
reciprok	$\left( \frac{1}{X} \right) \pm \left( \frac{\sigma_X}{X^2} \right)$	$\frac{1}{(0,44 \pm 0,12)} = \left( \frac{1}{0,44} \right) \pm \left( \frac{0,12}{0,44^2} \right) = \underline{\underline{2,3 \pm 0,6}}$
hatványozás	$(X^a) \pm ( a \cdot \sigma_X \cdot X^{a-1} )$	$(3,0 \pm 0,5)^{1,2} = (3,0^{1,2}) \pm ( 1,2 \cdot 0,5 \cdot 3,0^{1,2-1} ) = \underline{\underline{3,7 \pm 0,7}}$
exponenciális függvények	$(e^X) \pm (\sigma_X \cdot e^X)$	$e^{2,0 \pm 0,5} = (e^{2,0}) \pm (0,5 \cdot e^{2,0}) = \underline{\underline{7,4 \pm 3,7}}$
logaritmus függvények	$(10^X) \pm (\ln(10) \cdot \sigma_X \cdot 10^X)$	$10^{1,3 \pm 0,1} = (10^{1,3}) \pm (2,3 \cdot 0,1 \cdot 10^{1,3}) = \underline{\underline{20 \pm 5}}$
logaritmus	$(\ln X) \pm \left( \frac{\sigma_X}{X} \right)$	$\ln(2,0 \pm 0,1) = (\ln(2,0)) \pm \left( \frac{0,1}{2,0} \right) = \underline{\underline{0,69 \pm 0,05}}$
függvények	$(\lg X) \pm \left( \frac{\sigma_X}{\ln(10) \cdot X} \right)$	$\lg(20 \pm 10) = (\lg(20)) \pm \left( \frac{10}{2,3 \cdot 20} \right) = \underline{\underline{1,3 \pm 0,2}}$
trigonometrikus függvények	$(\sin X) \pm ( \cos X  \cdot \sigma_X)$	$\sin(60^\circ \pm 5^\circ) = \left( \sin \frac{\pi}{3} \right) \pm \left( \left  \cos \frac{\pi}{3} \right  \cdot \frac{5 \cdot \pi}{180} \right) = \underline{\underline{0,87 \pm 0,04}}$
	$(\cos X) \pm ( \sin X  \cdot \sigma_X)$	$\cos(60^\circ \pm 5^\circ) = \left( \cos \frac{\pi}{3} \right) \pm \left( \left  \sin \frac{\pi}{3} \right  \cdot \frac{5 \cdot \pi}{180} \right) = \underline{\underline{0,5 \pm 0,08}}$
	$(\operatorname{tg} X) \pm \left( \frac{\sigma_X}{(\cos X)^2} \right)$	$\operatorname{tg}(45^\circ \pm 5^\circ) = \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \pm \left( \frac{5 \cdot \pi}{180} / \left( \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 \right) = \underline{\underline{1,0 \pm 0,2}}$
inverz trigonometrikus függvények	$\arcsin X \pm \left( \frac{\sigma_X}{\sqrt{1-X^2}} \right)$	$\arcsin(0,87 \pm 0,08) =$ $= \left( \arcsin(0,87) \pm \left( \frac{0,08}{\sqrt{1-0,87^2}} \right) \right) \cdot \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{60^\circ \pm 9^\circ}}$
	$\arccos X \pm \left( \frac{\sigma_X}{\sqrt{1-X^2}} \right)$	$\arccos(0,5 \pm 0,08) =$ $= \left( \arccos(0,5) \pm \left( \frac{0,08}{\sqrt{1-0,5^2}} \right) \right) \cdot \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{60^\circ \pm 5^\circ}}$
	$\operatorname{arctg} X \pm \left( \frac{\sigma_X}{1+X^2} \right)$	$\operatorname{arctg}(1,0 \pm 0,2) =$ $= \left( \operatorname{arctg}(1,0) \pm \left( \frac{0,2}{1+1,0^2} \right) \right) \cdot \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{45^\circ \pm 6^\circ}}$

## 10. Illesztett egyenes meredeksége, tengelymetszete és ezek statisztikai jellemzői. Az Excel használata az illesztett paraméterek meghatározására.

A gyakorlatok során meghatározandó értékeket gyakran egy egyenes illesztéséből kapott meredekség és/vagy tengelymetszet értékéből számoljuk. Ebben a részben levezetés nélkül összefoglaljuk azokat a képleteket, amelyek egy egyszerű számológéppel is lehetővé teszik az illesztett egyenes paramétereinek, valamint azok szórásainak számolását. Mielőtt azonban megadnánk a képleteket, két fontos megjegyzést kell tenni:

1. Az itt megadott képletek első látásra riasztóan bonyolultnak tűnhetnek, azonban a használatuk valójában egyszerű. Ezt könnyű belátni, ha az olvasó az alábbiakban részletezett példát egy számológép segítségével saját maga végigszámolja. További könnyebbség lehet, hogy a tudományos számológépek többsége már számol statisztikai függvényeket. Ezekkel a számolások még gyorsabbá tehetők, mert a tudományos számológépek statisztikai módja a számolások során szükséges részeredményeket automatikusan megadja.
2. Nagyon sok speciális és általános program (pl. a táblázatkezelők) képes egyenes paramétereinek illesztésére. A laboratóriumi gyakorlatok során valószínűleg ezek használata lesz a gyakoribb. Ezek a programok azonban a legtöbbször *nem* a meredekség és a tengelymetszet szórását, hanem azok hibáját adják meg statisztikai paraméterként, pedig a kettő nem ugyanaz! Néha az is előfordul, hogy a leírás szerint a program szórást számol, de valójában hibát ír ki. A szórás és a hiba közötti kapcsolatot a

$$\text{szórás} = \sqrt{\text{adatok száma} \cdot \text{hiba}} \quad (1)$$

összefüggés adja meg.

Az alábbiakban felírt képletekben a következő jelöléseket használjuk:

$n$  az illesztés során használt adatszámok száma,

$x_i$  a független változó értéke az  $i$ -edik adatszámokban ( $i = 1 \dots n$ ),

$y_i$  a függő változó értéke az  $i$ -edik adatszámokban ( $i = 1 \dots n$ ),

$a$  az illesztett egyenes meredeksége ( $y = a \cdot x + b$  vagy  $y = a \cdot x$ ),

$b$  az illesztett egyenes tengelymetszete ( $y = a \cdot x + b$ ),

$\sigma_a$  az illesztett egyenes meredekségének szórása,

$\sigma_b$  az illesztett egyenes tengelymetszetének szórása,

$S_x$  és  $S_y$  az  $x_i$  és  $y_i$  adatok összege,

$S_{xy}$  az  $x_i$  és  $y_i$  adatok páronkénti szorzatainak összege,

$S_{xx}$  az  $x_i$  adatok négyzeteinek összege,

$S_{\Delta}$  az  $y_i$  adatok, valamint a meredekségből és tengelymetszetből számolható függő változók ( $a \cdot x_i + b$ ) eltérései négyzeteinek összege, azaz

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{és} \quad S_{\Delta} = \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)^2.$$

Ezek alapján az illesztett egyenes meredeksége ( $a$ ), valamint a meredekség szórása ( $\sigma_a$ ), amennyiben az egyenes az origón megy keresztül ( $b = 0$ ):

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \quad (2)$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot \frac{S_{\Delta}}{S_{xx}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}}. \quad (3)$$

Amennyiben az illesztett egyenes tengelymetszete nem  $b = 0$ , a meredekség és szórása:

$$a = \frac{n \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{n \cdot S_{xx} - S_x^2} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (4)$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{n^2}{n-2} \cdot \frac{S_{\Delta}}{n \cdot S_{xx} - S_x^2}} = \sqrt{\frac{n^2}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}. \quad (5)$$

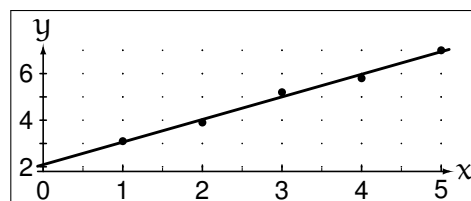
Az illesztett egyenes tengelymetszete ( $b$ ), valamint a tengelymetszet szórása ( $\sigma_b$ ):

$$b = \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{n \cdot S_{xx} - S_x^2} = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (6)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{n \cdot S_{xx}}{n-2} \cdot \frac{S_{\Delta}}{n \cdot S_{xx} - S_x^2}} = \sqrt{\frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}{n-2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}. \quad (7)$$

A következőekben az egyenesillesztés számolási technikáját mutatjuk be egy részletes példán keresztül az előbbieken definiált jelölések segítségével. Az egyenesillesztéshez használt adatpárok és azok grafikus megjelenítése a következő:

$i$ :	1	2	3	4	5
$x_i$ :	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$y_i$ :	3,1	3,9	5,2	5,8	7,0





Ekkor a számolások részeredményei:

$$\begin{aligned} S_x &= 1,0 + 2,0 + 3,0 + 4,0 + 5,0 = 15,0 \\ S_y &= 3,1 + 3,9 + 5,2 + 5,8 + 7,0 = 25,0 \\ S_{xy} &= 1,0 \cdot 3,1 + 2,0 \cdot 3,9 + 3,0 \cdot 5,2 + 4,0 \cdot 5,8 + 5,0 \cdot 7,0 = 84,7 \\ S_{xx} &= 1,0^2 + 2,0^2 + 3,0^2 + 4,0^2 + 5,0^2 = 55,0 \\ n \cdot S_{xx} - S_x^2 &= 5 \cdot 55,0 - 15,0^2 = 50,0 \end{aligned}$$

A meredekség és a tengelymetszet értékei ((4) és (6) egyenletek alapján):

$$a = \frac{5 \cdot 84,7 - 15,0 \cdot 25,0}{50,0} = 0,97 \quad \text{és} \quad b = \frac{55,0 \cdot 25,0 - 15,0 \cdot 84,7}{50,0} = 2,09$$

További részeredmény:

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= (3,1 - 0,97 \cdot 1,0 - 2,09)^2 + (3,9 - 0,97 \cdot 2,0 - 2,09)^2 + (5,2 - 0,97 \cdot 3,0 - 2,09)^2 + \\ &+ (5,8 - 0,97 \cdot 4,0 - 2,09)^2 + (5,9 - 0,97 \cdot 5,0 - 2,09)^2 = 0,091 \end{aligned}$$

A meredekség és a tengelymetszet szórásának értékei ((5) és (7) egyenletek alapján):

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{5^2}{5-2} \cdot \frac{0,091}{50,0}} = 0,12 \quad \text{és} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{5 \cdot 55,0}{5-2} \cdot \frac{0,091}{50,0}} = 0,41.$$

Az illesztett paraméterek szórása helyett (mellet) gyakran használjuk az illesztés jóságának megítélésére az ún. korrelációs együtthatót (R). A korábbiakkal analóg módon bevezetve az

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

jelölést, a korrelációs együttható

$$R = \frac{n \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{\sqrt{(n \cdot S_{xx} - S_x^2) \cdot (n \cdot S_{yy} - S_y^2)}}.$$

Belátható, hogy a korrelációs együttható  $-1$  és  $+1$  közötti értéket vehet fel. Minél nagyobb abszolút értékben, annál inkább lineáris a kapcsolat, azaz annál inkább korrelálnak az adatok.  $R = 0$  felel meg az korreláció teljes hiányának. Az előző példa adatai alapján  $R = 0,9952$ , ami egy jó illesztést jelent.

A korrelációs együttható helyett szokásosabb annak négyzetének, a determinációs (regressziós) együtthatónak ( $R^2$ ) a használata:

$$R^2 = \frac{(n \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y)^2}{(n \cdot S_{xx} - S_x^2) \cdot (n \cdot S_{yy} - S_y^2)} = 1 - \frac{n \cdot S_{\Delta}}{n \cdot S_{yy} - S_y^2}.$$

Az előző példa adatai alapján  $R^2 = 0,9904$ .  $R^2$  gyors diagnosztikát tesz lehetővé. Ha  $R^2 \approx 1$  ( $S_{\Delta}$  kicsi, jó korreláció), akkor az  $x - y$  kapcsolat tényleg lineáris. Ha  $R^2 \approx 0$ , ( $S_{\Delta}$  nagyon nagy) akkor biztosan nincs korreláció. Másképp megfogalmazva: az egyenes illesztésnél  $S_{\Delta}$ -t minimalizáljuk, azaz  $R^2$ -et maximalizáljuk.

Időigényes lenne minden gyakorlaton, minden illesztést a fenti módon leírtaknak megfelelően kézzel (számológéppel) végrehajtani. Ezért dolgozták ki a különböző táblázatkezelő és illesztő programokat, amelyekből mindenki azt használja, ami a legjobban tetszik, illetve amelyik rendelkezésre áll. Az *Oktatási szint* számítógépein ilyenek pl. a QtiPlot és az MS Office Excel programok. A továbbiakban az egyenes illesztés (lineáris regresszió) különböző lehetőségeit mutatjuk be az Excel program segítségével.

## 10.1. Trendvonal felvétele

*Csak illusztrációra javasolt!* Ha már van egy kész ábrájuk a mérési adatokból, erre kérhetnek különböző *előrejelzéseket, függvénykapcsolatokat*, ún. trendvonalat. Ha a *lineáris* trendvonalat választják, a program kiszámolja a legjobban illeszkedő egyenest az adatsorra, s lehetőség van az illesztett egyenes paramétereinek (meredekség, tengelymetszet és  $R^2$ ) kiírására is. Választhatnak egyparaméteres illesztést is (ha ez megfelel a mérés elvének), ahol a tengelymetszet értékét Önök rögzítik, s a program csak a meredekséget számolja. A trendvonal felvételének előnye, hogy gyors és látványos. Ugyanakkor hátránya, hogy nem szolgáltat statisztikai adatokat és az  $R^2$  kiszámítása egyparaméteres módban hibásan történik (programhiba!). Az 1. ábrán bemutatott példákban látszik, hogy a determinációs együttható (egy valós szám négyzete) negatív lett a második adatsor esetén! Azon kívül, hogy ez egy programhiba, arra is felhívja a figyelmet, hogy az adatokra nem illeszthető egyenes, és érdemes megnézni, mely pontokat mérték–számolták–gépelték be rosszul!

## 10.2. LIN.ILL függvény használata

Az Excel függvények egyenes illesztésre leghasznosabb/gyorsabb/egyszerűbb változata, amely az egyenes meredeksége és tengelymetszete mellett statisztikai paramétereket is ad. A *LIN.ILL* függvény a legkisebb négyzetek módszerével kiszámolja a megadott adatokhoz legjobban illeszkedő egyenes egyenletét, és eredményként az egyenest leíró tömböt adja vissza. A *LIN.ILL* más függvényekkel együtt való használatával kiszámíthatja lineáris ismeretlen paraméterekkel rendelkező, más típusú (például logaritmikus, polinomiális, exponenciális és hatványsor-) modellek statisztikáit is. Mivel ez a függvény egy tömböt ad eredményül, tömbképletként kell bevinni. Azaz, pl. egy egyváltozós esetben (csak egy független változó, x-adatsor van) jelöljenek ki egy  $2 \times 5$  cellából álló tömböt, írják be a függvényt:

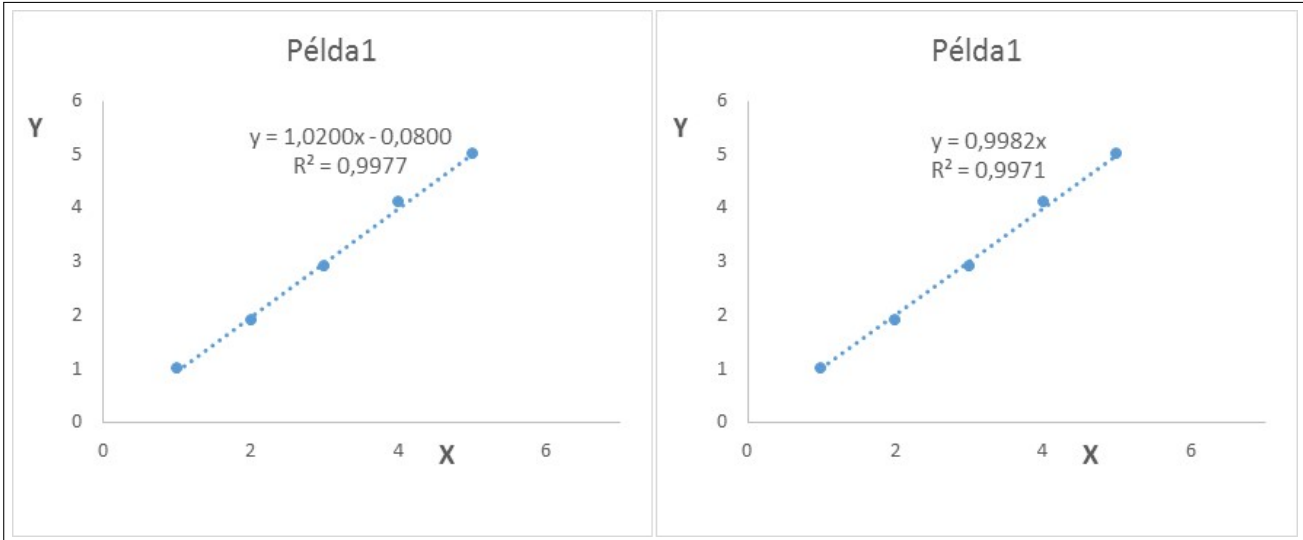
$$= \text{LIN.ILL}(\text{ismert\_y}; \text{ismert\_x}; \text{konstans}; \text{stat}) ,$$

majd egyszerre nyomják meg CTRL+SHIFT+ENTER billentyűkombinációt. A kiírt értékekről a 2. ábrán bemutatott táblázat, illetve a függvény súgója ad útmutatást. A függvény a tengelymetszet és a meredekség standard hibáját adja, amelyből a szórás az (1) egyenlet alapján számolható. Láthatóan a függvény ugyan azt az eredményt adja, mint a *kézi számolás*, de statisztikai paraméterekkel együtt.

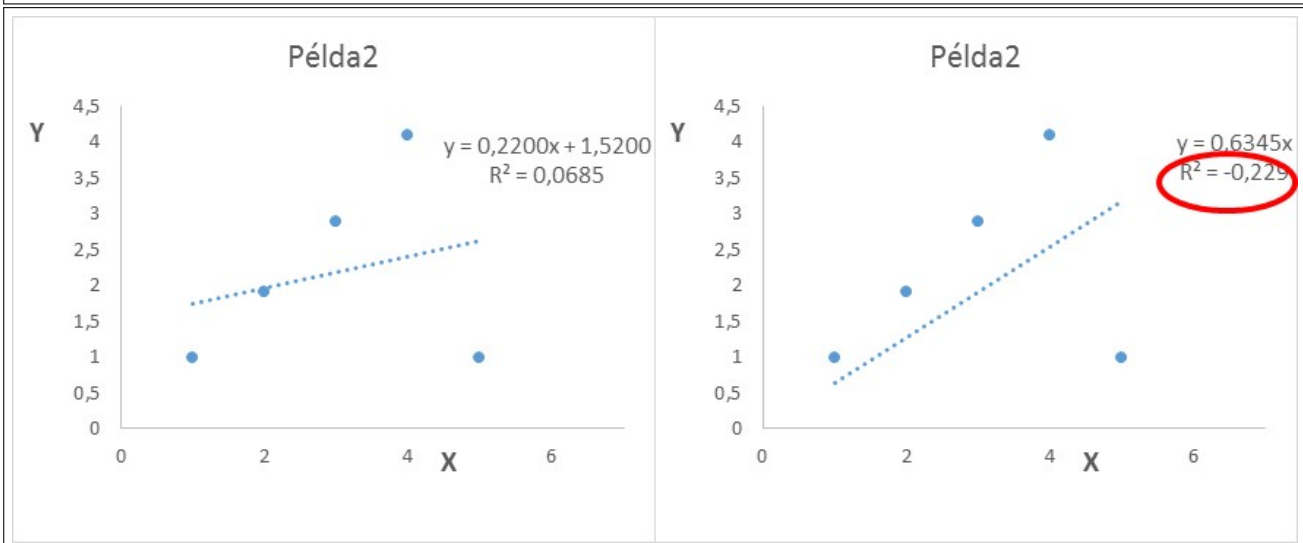
## 10.3. Regresszió számítás

Az Excel alapváltozatában a File/Beállítások/Bővítmények menü alatt találnak néhány kiegészítő alkalmazást, amit aktiválni lehet. Ezek egyike az *Analysis ToolPak*, amely statisztikai és műszaki elemzéshez kínál adatelemzési eszközöket. Ha ezt aktiválják, az ADATOK *fü*l lenyitásával az utolsó sorban megjelenik egy *Adatelemzés* funkció. Ebben található (sok más statisztikai segédlet mellett) a *Regresszió*. Ez adja a legrészletesebb statisztikát egy egyenes illesztésről. Meg kell jegyezni, hogy az algoritmus eltér a *LIN.ILL* számolásától, ezért kicsit más eredményeket adhat.

Adatsor		Illesztés két paraméterrel		Illesztés egy paraméterrel	
X	Y	a(merekség)	b(tengelymetszet)	a(merekség)	b(tengelymetszet)
1	1	1,0200	-0,0800	0,9982	0
2	1,9	szórás	szórás	szórás	szórás
3	2,9	0,0632	0,2098	0,0260	
4	4,1	R=	0,9988		
5	5	R <sup>2</sup> =	0,9977	R <sup>2</sup> =	0,9995

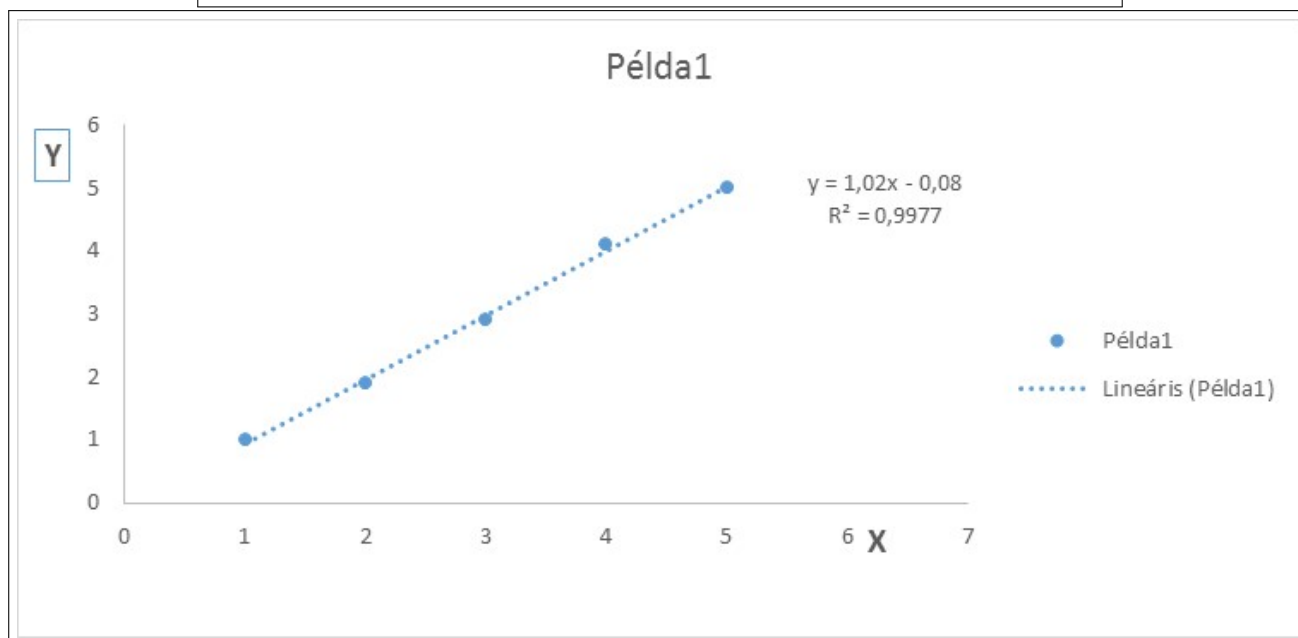


Adatsor		Illesztés két paraméterrel		Illesztés egy paraméterrel	
X	Y	a(merekség)	b(tengelymetszet)	a(merekség)	b(tengelymetszet)
1	1	0,2200	1,5200	0,6345	0
2	1,9	szórás	szórás	szórás	szórás
3	2,9	1,0475	3,4743	0,4443	
4	4,1	R=	0,2617		
5	1	R <sup>2</sup> =	0,0685	R <sup>2</sup> =	0,7183



1. ábra. A trendvonal használatának illusztrálása egy egyenes illesztéshez megfelelő (felső panel) és egy arra alkalmatlan (alsó panel) adatsor esetén. Az illesztések a korábban megadott képletek alapján történtek.

Adatsor		LIN.ILL eredménye			
X	Y	meredekség	1,02	-0,08	tengelymetszet
1	1	st. hiba	0,028284271	0,093808	st. hiba
2	1,9	R <sup>2</sup>	0,997698504	0,089443	
3	2,9		1300,5	3	szabadsági fok
4	4,1		10,404	0,024	
5	5				



2. ábra. A *LIN.ILL* használatának illusztrálása kétparaméteres esetben az előző, egyenes illesztéshez megfelelő adatsor esetén.

#### 10.4. A Solver bővítmény használata

A *Solver* bővítmény ugyanúgy aktiválható, mint az *Analysis ToolPak*, és ugyanott jelenik meg az Excel menüben. Itt Önöknek kell felépíteniük az elemzést, pl. a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával. Azaz a *Solver* segítségével minimalizálni kell a(z) (mérési)adatok és az illesztett értékek közötti különbségek négyzeteinek összegét, s így kapják meg azt a két paramétert (tengelymetszet és meredekség), amely a legjobban illeszkedő egyenest jelenti.

A 3. ábra egy példát mutat be a *Solver* használatára. A beviteli adatok között szerepel az illesztendő adatsor (X és Y), valamint becsülni kell a *Kiindulási paramétereket*. A *Függvénykapcsolat* alapján a program számolja az *Illesztett függőváltozót (Y-t)*.  $\Delta$  az illesztett és az illesztendő (a gyakorlat során a mért) adatok különbsége. A *Solver* alkalmazásakor a *Célérték* a *Szum( $\Delta^2$ )* értéke, ezt minimalizálja a program. A *Változócellák* az *a* és *b* értékei, amelyeket illeszti a program, hogy a *Célérték* minimális legyen. A *Solver* futtatása után kapott értékek (3. ábra, alsó panel) szórástartományon belül megegyeznek a korábbiakban bemutatottakkal.

Az előbb bemutatott példa ellenére a *Solver* használatának nem a lineáris regresszió a lényege, hiszen egyenest illeszteni sokféleképpen lehet. Vegyük észre, hogy a *Függvénykapcsolat*at Önök definiálják (*Illesztett Y*), azaz bármiféle nemlineáris függvény paramétereit ugyanezen módszerrel számolhatják. Nincs korlátozás az illesztendő paraméterek számában sem. *Fontos: Lineáris illesztésnél a kezdeti paraméterek rossz választása nem okoz hibát, mindig lesz megoldás. Nemlineáris illesztésnél a rossz kezdeti paraméter jelentheti azt, hogy a számolás nem konvergál, nem lesz igazi megoldás. A kiindulási paramétereket fizikai-kémiai alapon kell megválasztani!* A nemlineáris illesztés a lineáris regresszióanalóg módon történik, ahogyan ezt a 4. ábra is szemlélteti. Ha a kiindulási és az illesztett adatok jelentősen eltérnek egymástól, akkor a trend nem írható le a megadott *Függvénykapcsolattal* és aligha fogadható el az eredmény.

X	Y	Ilesztett Y	$\Delta^2$	Szum( $\Delta^2$ )	Kiindulási paraméterek		Függvénykapcsolat
1	1	2	1	5,23	a=	1	y=ax+b
2	1,9	3	1,21		b=	1	
3	2,9	4	1,21				
4	4,1	5	0,81				
5	5	6	1				

X	Y	Ilesztett Y	$\Delta^2$	Szum( $\Delta^2$ )	Végő paraméterek		Függvénykapcsolat
1	1	0,998182	3,31E-06	0,029818	a=	0,998182	y=ax+b
2	1,9	1,996364	0,009286		b=	0	
3	2,9	2,994545	0,008939				
4	4,1	3,992727	0,011507				
5	5	4,990909	8,26E-05				

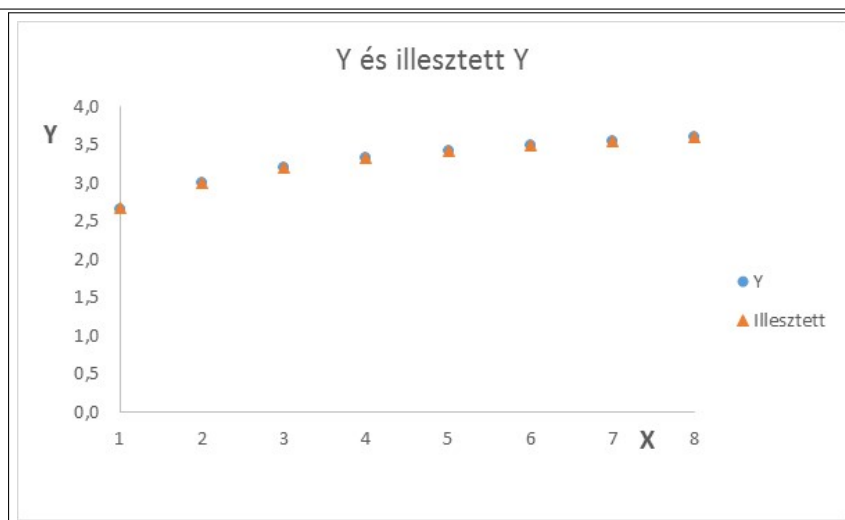
3. ábra. Az Excel Solver használatának bemutatása: futtatás előtt (felső panel) és után (alsó panel).

A Solver egyébként ugyanígy / hasonlóan használható nemlineáris egyenlet megoldására is.

X	Y	Illesztett Y	$\Delta^2$	Szum( $\Delta^2$ )	Kiindulási paraméterek	Függvénykapcsolat
1	2,67	2,6666667	1,11E-05	0,623487	a= 2	$y = a + \frac{bx}{1+cx}$
2	3,00	2,8	0,04		b= 2	
3	3,20	2,8571429	0,117551		c= 2	
4	3,33	2,8888889	0,194579			
5	3,43	2,9090909	0,271346			
6	3,50	2,9230769	0,33284			
7	3,56	2,9333333	0,392711			
8	3,60	2,9411765	0,434048			



X	Y	Illesztett Y	$\Delta^2$	Szum( $\Delta^2$ )	Végő paraméterek	Függvénykapcsolat
1	2,67	2,67013148	1,73E-08	1,06E-05	a= 2,022273	$y = a + \frac{bx}{1+cx}$
2	3,00	2,9995384	2,13E-07		b= 0,961015	
3	3,20	3,19897106	1,06E-06		c= 0,483371	
4	3,33	3,33267984	7,18E-06			
5	3,43	3,42855794	2,08E-06			
6	3,50	3,5006709	4,5E-07			
7	3,56	3,55688034	9,73E-06			
8	3,60	3,60192471	3,7E-06			



4. ábra. Az Excel Solver használatának bemutatása nemlineáris illesztés esetén: futtatás előtt (felső panel) és után (alsó panel).

# 11. Műszaki-tudományos ábrák készítése

Mind a kézzel, milliméterpapíron elkészített, mind a számítógépes ábrákkal szemben ugyanazok a követelmények:

- Lehetőleg minden mért adat, vagy azok transzformáltjai szerepeljenek az ábrán.
- Legyen megfelelő – szükség esetén mértékegységgel ellátott – címe mind a tengelyeknek, mind az ábrának. A feliratok mind szakmai, mind nyelvtani szempontból legyenek helyesek. Lehetőleg név és dátum is szerepeljen az ábrán.
- A tengelyek beosztásának és a címkefeliratoknak olyanoknak kell lenniük, hogy az adatok könnyen ábrázolhatók és visszaolvashatók legyenek, és minimalizálják az ábra haszontalan területeit. Ezt az elvet mindig a konkrét feladatra kell alkalmazni, pl. egyenesillesztés esetén néha szükséges, hogy a tengelymetszet akkor is rajta legyen az ábrán, ha kívül esik a mért adatok tartományán.
- Görbeillesztés esetén az ábrának tartalmaznia kell mind az illesztett, mind az illesztésből kihagyott adatokat (megkülönböztetett jelzéssel!), valamint az illesztett görbét is, az illesztett paraméterek értékével együtt.
- Több görbe és/vagy adatsor együttes ábrázolása esetén az egyes görbék vagy adatsorok legyenek világosan elkülöníthetők.

Természetesen lehetnek egyéb elvárások is a konkrét feladattól függően. Ritkán a követelmények egyike-másika nem teljesíthető 100 %-osan (pl. ha egy rossz pont nagyságrendekkel különbözik a többitől, az teljesen eltorzítja az ábrát), de az esetek túlnyomó többségében a fentiek betartása elegendő hibátlan ábrák készítéséhez.

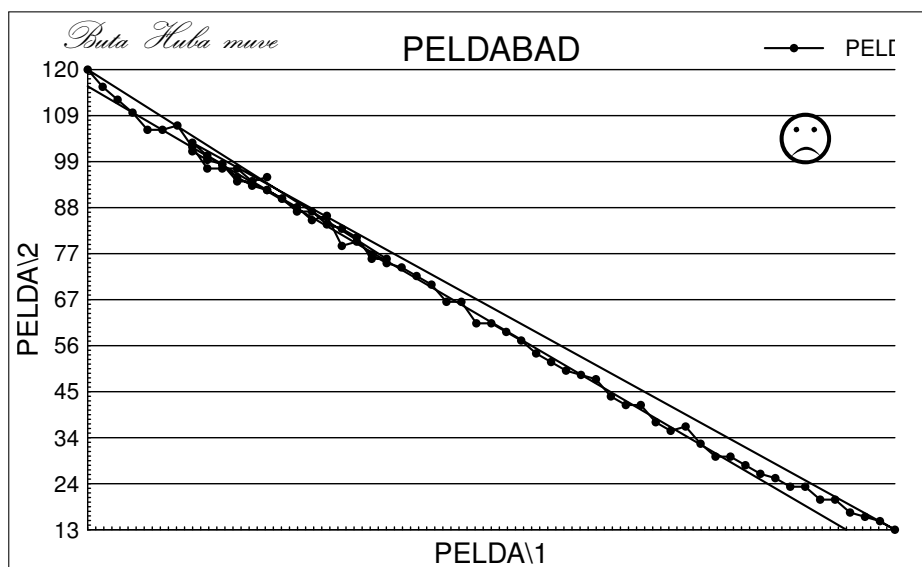
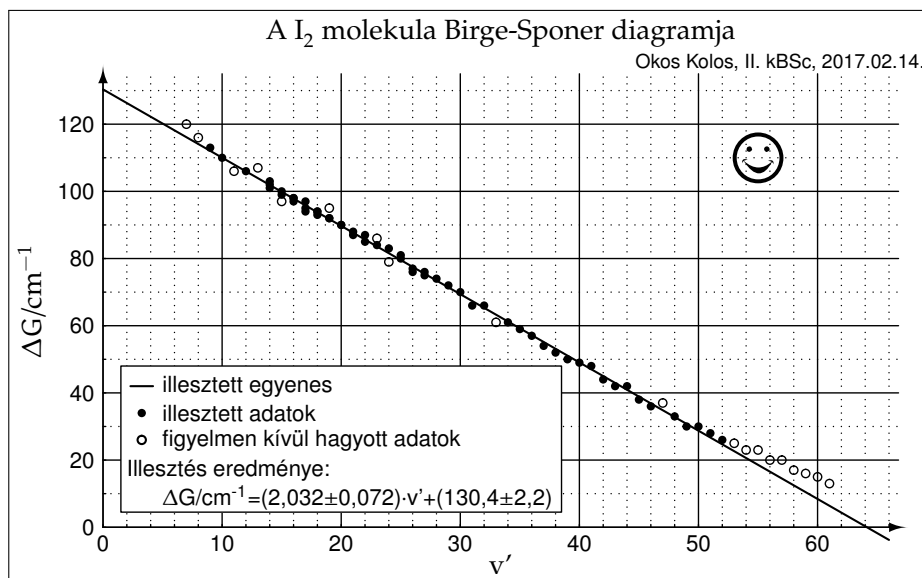
Az eddigiekből is kitűnhet, hogy az ábrakészítő programok felületes ismerete sokszor nem elég. *Általában nem lehet elfogadni kész ábraként, amit egy program az adatok bevitele után az alapbeállításával felrajzol a képernyőre, hanem olyan szinten kell megtanulni az alkalmazott program kezelését, hogy a fenti követelmények teljesíthetők legyenek!* A tudományos életben ezt fokozottan kell hangsúlyozni, mert a legtöbb kereskedelemben lévő program (főleg a táblázatkezelők) a közgazdasági és prezentációs célokra készített ábrákhoz igazítja az alapbeállításokat, és nem a tudományos életben fokozottabban megkövetelt pontosság és teljesség igényéhez.

Az alábbiak egy példán keresztül mutatják be azokat a jellemző hibákat, amiket a leggyakrabban szoktak elkövetni számítógéppel történő ábrakészítés során. Az 5. ábra alsó és felső panelje ugyanarra az adatsorra történő egyenesillesztést illusztrálja. A felső panel teljes mértékben megfelel a fentebb részletezett követelményeknek, míg az alsó panel a – tapasztalat szerint – leggyakrabban előforduló hibákat mutatja. Ezek könnyen elkerülhetők a használt program megfelelő szintű ismeretével. A függelék ezen szakaszának további része a két panel összevetésével segíteni igyekszik a következő tipikus hibák és hiányosságok elkerülését:

**Automatikus pontösszekötés:** Majdnem minden program alapbeállítása az, hogy a bevitt pontokat valamilyen szimbólummal jelöli és azokat egyenes szakaszokkal köti össze. Az összekötésnek a legtöbb esetben nincs értelme, csak a „szem vezetésére” szokták használni tendenciák bemutatására, főleg közgazdasági grafikonokon. Tudományos ábrákon vonallal illesztett görbét szokás jelölni, így a mért pontok összekötése félrevezető. Ráadásul érthetetlen ábrákhoz vezethet, ha az adatok nincsenek szigorúan növekvő vagy csökkenő sorrendben, pl. az 5. ábra alsó paneljében egyetlen nem sorrendben lévő pont egy felesleges vonalat ad.

**Rossz tengelytartomány:** Néhány program automatikusan ráteszi az ábrára a koordináta-rendszer origóját. Az ábrázolandó pontok tartományától függően ez ahhoz vezethet, hogy az ábra kicsiny részére zsúfolódik össze minden pont, azok menete kivehetetlen lesz.

**Egyetlen tengelybeosztás:** Sok program a tengelyek minimális és maximális értékét az adatsorokból kapható minimális és maximális értékhez rendeli. Az alsó panelen az y-tengely beosztása rossz, mert a 13 – 120 tartományt nem lehet jól felosztani tíz részre. Ráadásul a beosztások feliratai pontatlanok,



5. ábra. Egy kifogástalanul (felső panel) és egy a tipikus hibákat bemutató (alsó panel) számítógépes ábra.

csak egész értékre vannak megadva. Emiatt hibás a visszaolvasás, azonos hosszúságú tartományokhoz eltérő értékek tartoznak (pl.  $120 - 109 \neq 109 - 99$ )! A felhasználónak tudnia kell, hogyan lehet beállítani a tengelyek minimális és maximális értékeit, a beosztás sűrűségét és a beosztások helyét jelző számok kiíratási formátumát!

**Automatikus tengelyválasztás:** Emiatt rossz beosztás, értelmetlen vagy hiányzó címek és beosztásfeliratok lehetnek a tengelyeken. Az alsó panelen hiányoznak az  $x$ -tengely beosztásainak feliratait, a semmitmondó automatikus tengelycímek az adatállomány nevéből és a felhasznált oszlopok sorszámából adódnak, a szélső adatok pedig szinte „lelőgnak” az ábráról.

**Semmitmondó főcím:** Nehezíti az ábra megértését, főleg ha az értelmezés és a készítés között sok idő telik el. Sok program alapértelmezése, hogy főcímként a grafikus beállításokat tartalmazó állomány nevét definiálja.

**Név, cím vagy dátum hiánya:** Bosszantó információvesztés lehet. Példánkban a rossz ábrán a dátum hiányzik.

**Rossz pozícionálás:** Az ábra valamely részén szerencsésebb esetben csak komikus, rosszabb esetben információvesztéshez vezethet. Esetünkben a jelmagyarázó blokk annyira rossz helyen van az alsó panelen, hogy a fele lemaradt.



**Automatikus jelmagyarázó blokk:** Az automatikus jelmagyarázó blokk (angolul *legend*) általában semmit sem mond. Vagy egyáltalán ne használjunk ilyen blokkot, vagy pontosan töltsük ki! A jelmagyarázó blokknak akkor van értelme, ha egy ábrán több görbét tüntetünk fel és rövid utalásokkal akarjuk segíteni az ábra megértését.

**Rácsozat:** Ha van, gondosan kell beállítani. Nem segíti az ábra olvasását a túl sűrű rácsozat, mert szinte elfedi a görbéket. A ritka rácsozat sem jó, mivel a függvényértékeket nagyon nehéz visszaolvasni ilyen esetekben. Sokszor tisztább az ábra, ha egyáltalán nincs rácsozat. Az biztosan nem jó, ha vagy csak a vízszintes, vagy csak a függőleges rácsvonalak vannak feltüntetve, ahogy azt a rossz ábra mutatja.

**Nem megfelelő betűtípus és / vagy betűnagyság használata:** Jobb esetekben csak csúnya vagy komikus feliratokhoz vezet, rosszabb esetben félreértésre is alkalmat adhat. Az 5. ábra alsó paneljén a név értelmetlenül csicsás és nem ékezetes betűkkel készült. Ábrákon általában érdemes egyszerű vonalvezetésű és vastagabb betűtípusokat használni (pl. Swiss, Arial, Helvetica, Tahoma, Verdana, Calibri, stb. típusok).

**Az elhagyott pontok nem szerepelnek az ábrán, vagy jelöletlenek:** Ha nem tüntetjük fel az ábrán az illesztésnél figyelmen kívül hagyott pontokat, akkor információt veszünk a mérések valódi pontosságáról és a pontelhagyások okairól. Ha a rossz pontokat az illesztettekkel azonos módon jelöljük (ahogy ez a rossz ábrán látható), akkor a számított adatok reprodukálása lesz nehéz.