doktori (phd) értekezés tézisei

MINIMÁLIS KLÓNOK

Waldhauser Tamás

SZEGED
2007

1. Bevezetés

1.1. Minimális klónok. *Konkrét klónon* egy adott halmazon értelmezett többváltozós függvények olyan összességét értjük, amely zárt az összetett függvények képzésére és tartalmazza a projekciókat. Az *absztrakt klónok* olyan heterogén algebrák, amelyek a konkrét klónbeli kompozícióműveletek struktúráját írják le. A részklón, klónhomomorfizmus, faktorklón fogalma természetes módon definiálható, és az izomorfiatételeket is be lehet bizonyítani absztrakt klónokra. Minden konkrét klón tekinthető absztrakt klónnak is, továbbá minden absztrakt klón izomorf egy konkrét klónnal, ezért a továbbiakban nem mindig különböztetjük meg a két fogalmat élesen egymástól.

Tetszőleges $\mathbb{A} = (A; F)$ algebra kifejezésfüggvényei klónt alkotnak, amelyet az $\mathbb{A}$ *algebra klónjának* nevezünk és $\operatorname{Clo}\mathbb{A}$-val jelölünk. Ez a legszűkebb F-et tartalmazó klón, tehát F *generálja* a $\operatorname{Clo}\mathbb{A}$ klónt, azaz $[F] = \operatorname{Clo}\mathbb{A}$. Nyilván minden klón előáll egy algebra klónjaként: egy generátorrendszer elemeit kell az algebra alapműveleteinek tekinteni.

Egy $\mathcal{C}$ absztrakt klón *reprezentációja* olyan klónhomomorfizmus (illetve annak képe), ami $\mathcal{C}$-t valamely halmaz műveleteinek konkrét klónjába képezi le. A $\mathcal{C}$ klón összes reprezentációi varietást alkotnak (amely csak term-ekvivalencia erejéig meghatározott). Másrészt minden varietáshoz tartozik egy klón, a varietás megszámlálhatóan végtelen szabad genrátorrendszerrel generált szabad algebrájának klónja. Ez a két megfeleltetés egymás inverze (term-ekvivalencia és klónizomorfizmus erejéig), tehát azt mondhatjuk, hogy az absztakt klónok nem mások, mint varietások, ha csak term-ekvivalencia erejéig tekintjük őket. A $\mathcal{C}$ klón n-változós része, amit $\mathcal{C}^{(n)}$ jelöl, azonosítható a $\mathcal{C}$-hez tartozó varietás n elem által szabadon generált szabad algebrájával. A projekciók a változóknak felelnek meg, ezért az n-változós projekciókat $x_1, \ldots, x_n$ jelöli a továbbiakban. A kétváltozós esetben x-et és y-t is használunk x_1 és x_2 helyett, a háromváltozós projekciókat pedig x, y, z jelöli.

Egy adott A halmazon értelmezett összes klónok a tartalmazásra nézve hálót alkotnak, melynek legkisebb eleme a projekciók alkotta *triviális klón* klón (jelölése $\mathcal{I}_A$), legnagyobb eleme pedig az összes A-n értelmezett többváltozós műveletek klónja. A *minimális klónok* a klónháló atomjai, vagyis egy klón akkor minimális, ha a triviális klón az egyetlen valódi részklónja. Véges halmazon véges sok minimális klón van, és minden klón tartalmaz minimális klónt. Egy nemtriviális klón akkor és csak akkor minimális, ha bármely nemtriviális eleme generálja. Így minden klón generálható egyetlen elemmel, azaz előáll olyan algebra klónjaként, amelynek csak egy alapművelete van. A minimális klónokat többnyire egy generátorelemükkel adjuk meg.

Természetes, hogy a lehető legkisebb változószámú generátort válasszuk. Ezeket a generátorokat *minimális függvényeknek* nevezzük: az f függvény akkor minimális, ha $[f]$ minimlis klón, amelynek nincs olyan nemtriviális eleme, amelynek aritása kisebb, mint f aritása. A minimális függvények öt típusba sorolhatók I. G. Rosenberg alábbi tétele szerint.

1.1. Tétel [Ros]. *Legyen f minimális aritású nemtriviális függvény egy minimális klónban. Ekkor f kielégíti az alábbi öt feltétel valamelyikét:*

(I) *f egyváltozós, és $f^2(x) = f(x)$ vagy $f^p(x) = x$ valamely p prímszámra;*
(II) *f idempotens kétváltozós művelet, azaz $f(x, x) = x$;*
(III) *f háromváltozós többségi függvény, azaz $f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x$;*
(IV) *$f(x, y, z) = x + y + z$, ahol $+$ egy elemi Abel 2-csoport művelete;*
(V) *f szemiprojekció, azaz létezik olyan i $(1 \leq i \leq n)$, hogy $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, ha az $x_1, \ldots, x_n$ értékek között van ismétlődés.*

Az (I)-es és (IV)-es típusok esetén a fenti feltételek garantálják f minimalitását, de a másik három esetben nem, és a minimális függvények teljes leírása jelenleg reménytelennek látszik. Számos részeredmény van, amelyek bizonyos megszorítások mellett karakterizálják a minimális klónokat, ezek közül néhányat megemlítünk a későbbiekben.

Triviális és minimális klónok definiálhatók az absztrakt klónok szintjén is, és Rosenberg tétele is szinte szó szerint érvényes marad (noha klónhálókról és azok atomjairól nyilván nem beszélhetünk ebben a szövegkörnyezetben). Egy $\mathbb{A}$ algebra klónja akkor és csak akkor minimális,

$$
\begin{aligned}
\text{(félhálók) } \mathcal{SL}:&\ (xy)\,z = x\,(yz)\,, xy = yx\\
\text{(derékszögű kötegek) } \mathcal{RB}:&\ (xy)\,z = x\,(yz)\,, xyz = xz\\
\text{(jobbnormális kötegek) } \mathcal{RNB}:&\ (xy)\,z = x\,(yz)\,, xyz = yxz\\
\text{(jobbreguláris kötegek) } \mathcal{RRB}:&\ (xy)\,z = x\,(yz)\,, xyx = yx\\
\mathcal{B}:&\ x\,(yx) = (xy)\,x = (xy)\,y = (xy)\,(yx) = x\,(xy) = xy\\
\mathcal{D}:&\ x\,(yx) = (xy)\,x = (xy)\,y = (xy)\,(yx) = xy,\\
&\ x \cdot \overleftarrow{x \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} = x \ \ (n = 1, 2, \ldots)\\
\mathcal{D} \cap \mathcal{A}:&\ x\,(yz) = xy, xy^2 = xy\\
\text{(jobbfélhálók) } \mathcal{RSL}:&\ x\,(yz) = xy, xy^2 = xy, (xy)\,z = (xz)\,y\\
\text{(p-ciklikus grupoidok) } \mathcal{C}_p:&\ x\,(yz) = xy, xy^p = x,\ \ (xy)\,z = (xz)\,y
\end{aligned}
$$

1. TÁBLÁZAT. Néhány minimális klónú grupoidvarietás

ha az általa generált varietás klónja minimális, így a varietások alkalmasak konkrét és absztrakt minimális klónok leírására is.

1.2. Példák. A legegyszerűbb példákat (II)-es típusú minimális klónokra, azaz minimális klónú grupoidokra, a félhálók és a derékszögű kötegek adják. Az 1. táblázatban megadjuk néhány további minimális klónnal rendelkező grupoidvarietás definiáló azonosságait. Az áttekinthetőség kedvéért $\overleftarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$-et írunk az $(\cdots((x_1x_2)\,x_3)\cdots)\,x_n$ szorzat helyett, és hasonlóan $\overrightarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ jelöli az $x_1\,(\cdots(x_{n-2}\,(x_{n-1}x_n))\cdots)$ szorzatot. Az $\overleftarrow{x \cdot y \cdot \ldots \cdot y}$ kifejezést xy^n-nel, az $\overrightarrow{y \cdot \ldots \cdot y \cdot x}$ kifejezést pedig ${}^n yx$-szel rövidítjük (ahol n a fellépő y-ok száma). Az $xx = x$ azonosságot nem írtuk ki sehol, de természetesen idempotens varietásokról van szó.

Az $\mathcal{SL}$ és $\mathcal{RB}$ varietások önduálisak, a jobbnormális kötegek, jobbreguláris kötegek, jobbfélhálók duálisai rendre a balnormális kötegek ($\mathcal{LNB}$), balreguláris kötegek ($\mathcal{LRB}$), balfélhálók ($\mathcal{LSL}$). (Az $\mathcal{A}$ varietást az $x\,(y\,(zu)) = x\,((yz)\,u)$ azonosság definiálja, erre később, a majdnem asszociatív műveletek vizsgálatánál lesz szükségünk.) Az 1. ábrán látható a fenti varietások és duálisaik által generált metszetfélháló ($\mathcal{LZ}$ és $\mathcal{RZ}$ a bal és jobb zéró félcsoportok varietását jelöli, a legalsó elem pedig az egyelemű grupoidok varietása).

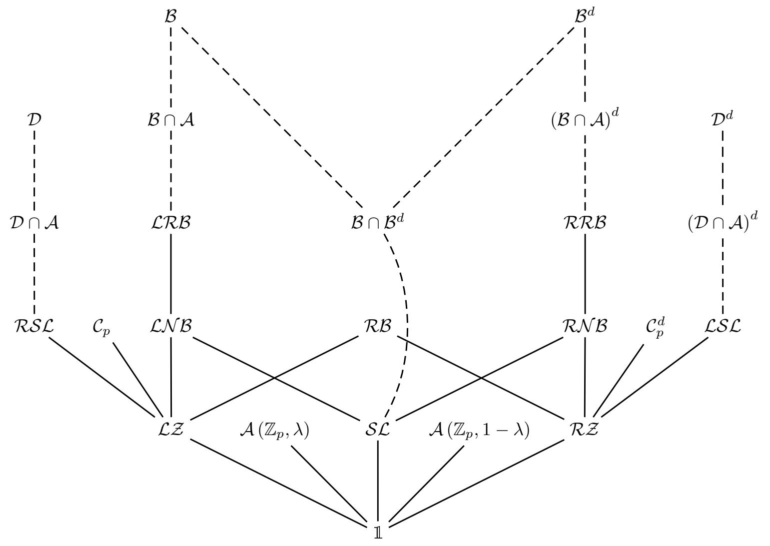
A $\mathcal{B}$ és $\mathcal{D}$ varietások klónjának minimalitását Lévai Levente és Pálfy Péter Pál igazolta [LP]. J. Płonka vezette be a p-ciklikus grupoid fogalmát [Pł2], és megmutatta, hogy $\mathrm{Clo}\,\mathcal{C}_p$ akkor és csak akkor minimális, ha p prímszám [Pł1].

Az affin terek további példákat szolgáltatnak binér minimális klónokra. *Affin téren* olyan algebrát értünk, amelynek tartóhalmaza egy vektortér, és klónja ezen vektortér teljes idempotens reduktja. Egy affin tér klónja akkor és csak akkor minimális, ha az alaptest izomorf a $\mathbb{Z}_p$ maradékosztálytesttel valamely p prímszámra. Ha $p = 2$, akkor ez a klón (IV)-es típusú, ha $p > 2$, akkor pedig (II)-es típusú. A továbbiakban affin téren mindig $\mathbb{Z}_p$ feletti affin teret értünk (tetszőleges p prímre).

Sokkal kevesebb példát ismerünk (III)-as típusú minimális klónra. A legegyszerűbbek azok, amelyek csak egy nemtriviális háromváltozós műveletet tartalmaznak, ilyen például tetszőleges hálón az $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ mediális függvény által generált klón [PK]. Nem létezik olyan minimális klón, amely pontosan két többségi függvényt tartalmaz (lásd 3.4. Tétel), így a következő legegyszerűbb példák azok a klónok, amelyek három többségi függvényt tartalmaznak. Bármely halmazon ilyen klónt generál a

$$
d\,(a, b, c) = \begin{cases} a & \text{ha } a = b \\ c & \text{ha } a \neq b \end{cases}
$$

formulával definiált duális diszkriminátor függvény [FP, CsG].



1. ÁBRA. Néhány minimális klónú grupoidvarietás

1.3. Karakterizációs tételek. A minimális klónok teljes általánosságban történő leírása nagyon nehéz problémának tűnik, vannak azonban olyan eredmények, amelyek bizonyos feltételek mellett karakterizálják a minimális klónokat. Néhányat megemlítünk ezen eredmények közül, de csak azokat az állításokat fogalmazzuk meg pontosan, amelyekre szükségünk lesz a későbbiekben.

A legtermészetesebb megközelítés az alaphalmaz méretének korlátozása. A kételemű halmazon E. Post meghatározta az összes klónt [Po], ezek közül hét minimális. Csákány Béla írta le a háromelemű halmaz minimális klónjait [Cs1], a (III)-as típusra vonatkozó tételt alább idézzük. A négyelemű halmazon B. Szczepara határozta meg a (II)-es típusú minimális klónokat [Szcz], a minimális többségi függvényeket pedig a 2.6. Tételben adjuk meg. Egy nemtriviális szemiprojekció a négyelemű halmazon csak három- vagy négyváltozós lehet, az előbbi eset mégy nyitott, az utóbbi már megoldott [JQ].

1.2. Tétel [Cs1]**.** *Izomorfia erejéig tizenkét minimális többségi függvény van az* $\{1,2,3\}$ *halmazon, és ezek három minimális klónba tartoznak, amelyek rendre* 1*,* 3 *és* 8 *többségi függvényt tartalmaznak. Ezt a három klónt az* m_1*,* m_2*,* m_3 *többségi függvények generálják, amelyek értékét* $\{a_1,a_2,a_3\}=\{1,2,3\}$ *esetén az alábbi képletek adják meg:*

$$m_1(a_1,a_2,a_3)=1;$$
$$m_2(a_1,a_2,a_3)=a_1;$$
$$m_3(a_1,a_2,a_3)=a_{i+1},\ \textit{ha } a_i=2\ (\textit{az indexek modulo } 3 \textit{ értendők}).$$

A fenti tétel segítségével Csákány Béla leírta a *konzervatív* minimális többségi függvényeket, vagyis azokat, amelyek megőrzik az alaphalmaz minden részhalmazát [Cs2]. A konzervatív kétváltozós minimális függvények szintén ismertek [Cs2], konzervatív szemiprojekciókra csak részeredmények vannak [JQ].

Az alaphalmaz helyett meg lehet szorítani magának a klónnak a méretét is. Lévai Levente és Pálfy Péter Pál ért el eredményeket ebben az irányban: meghatározták azokat a binér minimális klónokat, amelyek legfeljebb hét kétváltozós műveletet tartalmaznak [LP]. (Az öt illetve hét binér művelet esete valójában J. Dudek és J. Gałuszka eredménye [Du, DG].) A 3.7. Tételben leírjuk a legfeljebb hét háromváltozós függvényt tartalmazó (III)-as típusú minimális klónokat.

Egy másik lehetséges megszorítás, hogy bizonyos azonosságokat kielégítű műveletek körében keressük a minimális függvényeket. Talán a legtermészetesebb ilyen kérdés az, hogy melyek a minimális klónnal rendelkező félcsoportok. Ezt a problémát B. Szendrei Mária oldotta meg: meghatározta azokat a kötegeket amelyek részklónhálója lánc [SzM] (lásd még [P^3]).

1.3. Tétel [P^3, SzM]**.** *A minimális klónú félcsoportok pontosan a bal- és jobbreguláris kötegek, valamint a derékszögű kötegek.*

Általánosítását adja a fenti állításnak az 5.7. Tétel és az 5.8. Tétel, ezekben leírjuk azokat a majdnem asszociatív kétváltozós műveleteket, amelyek minimális klónt generálnak, a „majdnem asszociatív" kifejezés két különböző értelmezése mellett.

Szendrei Ágnes és K. Kearnes vizsgálta azokat a minimális klónokat, amelyeket egy önmagával felcserélhető művelet generál [KSz]. Ez a felcserélhetőségi tulajdonság a kétváltozós esetben ekvivalens az $(xy)\,(zu) = (xz)\,(yu)$ entropikus, vagy mediális azonossággal.

1.4. Tétel [KSz]**.** *Legyen $\mathbb{A}$ egy minimális klónnal rendelkező entropikus grupoid. Ekkor $\mathbb{A}$ vagy duálisa affin tér, derékszögű köteg, balnormális köteg, jobbfélháló vagy p-ciklikus grupoid valamely p prímszámra.*

A 4.5. Tételben megmutatjuk, hogy ugyenezeket a grupoidokat kapjuk, ha csak a disztributivitást tesszük fel (ami az idempotens grupoidok körében gyengébb az entropicitásnál). Ezenkívül leírjuk még az $x\,(yz) = xy$ azonosságot kielégítő minimális klónú grupoidokat (lásd 4.3. Lemma).

Végezetül idézzük K. Kearnes egy tételét, amely karakterizálja azokat az Abel-féle algebrákat, amelyek klónja minimális [Kea]. A 4.8. Tételben majd általánosítjuk ezt az eredményt gyengén Abel-féle algebrákra.

1.5. Tétel [Kea]**.** *Ha egy minimális klónnak létezik nemtriviális Abel-féle reprezentációja, akkor vagy egyváltozós, vagy pedig egy affin tér, egy derékszögű köteg vagy egy p-ciklikus grupoid klónja valamely p prímszámra.*

2. Többségi minimális klónok a négyelemű halmazon

Ezen fejezet célja a négyelemű halmaz minimális többségi függvényeinek meghatározása. Ez véges feladat, hiszen véges sok lépésben ellenőrizhető, hogy egy adott függvény minimális-e, és véges halmazon véges számú többségi függvény van. Mindazonáltal a négyelemű halmaz már meglehetősen nagy ebből a szempontból. A kételemű halmazon csak egy többségi függvény van, a háromeleműn pedig $3^6 = 729$, míg a négyelemű halmazon már $4^{24} = 281\,474\,976\,710\,656$ többségi függvény van. Ezért még számítógéppel is reménytelennek tűnik egyenként sorra venni az összes függvényt.

2.1. Minimális többségi függvények véges halmazokon. A következő tétellel a megvizsgálandó függvények számát csökkentjük oly módon, hogy megmutatjuk, hogy véges halmazon minden minimális többségi klón generálható olyan függvénnyel, ami kielégít egy bizonyos azonosságot.

2.1. Tétel [Wa1]**.** *Legyen f többségi függvény egy véges halmazon. Ekkor létezig olyan $g \in [f]$ többségi függvény, amely kielégíti az alábbi azonosságot.*

$$g\big(\, g(x,y,z)\,,\, g(y,z,x)\,,\, g(z,x,y)\,\big) = g(x,y,z) \tag{2.1}$$

A következő lemmában leírjuk, hogy hogyan lehet a (2.1) azonosság érvényességét kiolvasni a többségi függvény művelettáblázatából. Ehhez szükségünk lesz néhány jelölésre. Legyen $\langle abc\rangle = \{(a,b,c),(b,c,a),(c,a,b)\}$, továbbá jelölje $f|_{\langle abc\rangle} \equiv u$ azt, hogy $f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b) = u$, és $f|_{\langle abc\rangle} = p$ pedig azt, hogy $f(a,b,c) = a, f(b,c,a) = b, f(c,a,b) = c$. (Itt a p betű a „projekció" rövidítése: $f|_{\langle abc\rangle} = p$ azt jelenti, hogy f megegyezik az első projekcióval az $\langle abc\rangle$ halmazon. Ha $f|_{\langle abc\rangle} = p$ és $f|_{\langle bac\rangle} = p$ is fennáll, akkor $f|_{\{a,b,c\}}$ úgy fest, mint az első projekció – eltekintve attól, hogy többségi függvény. Hasonlóan, $f|_{\langle abc\rangle} \equiv u \equiv f|_{\langle bac\rangle}$ azt jelenti, hogy f annyira konstans az $\{a,b,c\}$ halmazon, amennyire egy többségi függvény csak lehet.)

2.2. Lemma [Wa1]**.** *Legyen f olyan többségi függvény egy véges A halmazon, ami kielégíti a (2.1) azonosságot, és legyenek a,b,c páronként különböző elemei A-nak. Legyen továbbá $u = f(a,b,c)$, $v = f(b,c,a)$, $w = f(c,a,b)$. Ekkor $|\{u,v,w\}| \neq 2$, és ha u,v,w páronként különbözők, akkor $f|_{\langle uvw\rangle} = p$.*

	M_1	M_2			M_3							
$(1,2,3)$	4	4	2	3	3	3	4	3	4	4	3	4
$(2,3,1)$	4	2	3	4	3	4	3	3	4	3	4	4
$(3,1,2)$	4	3	4	2	3	3	3	4	4	4	4	3
$(2,1,3)$	4	2	4	3	4	3	4	4	3	4	3	3
$(1,3,2)$	4	4	3	2	4	4	4	3	3	3	3	4
$(3,2,1)$	4	3	2	4	4	4	3	4	3	3	4	3
$\{1,2,4\}$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$\{1,3,4\}$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$(4,2,3)$	4	4	2	3	3	3	4	3	4	4	3	4
$(2,3,4)$	4	2	3	4	3	4	3	3	4	3	4	4
$(3,4,2)$	4	3	4	2	3	3	3	4	4	4	4	3
$(2,4,3)$	4	2	4	3	4	3	4	4	3	4	3	3
$(4,3,2)$	4	4	3	2	4	4	4	3	3	3	3	4
$(3,2,4)$	4	3	2	4	4	4	3	4	3	3	4	3

2. TÁBLÁZAT. Nemkonzervatív minimális többségi függvények a négyelemű halmazon

Ez a lemma körülbelül 60 millióra csökkenti a vizsgálandó függvények számát. A következő tétel szerint egy kicsit erősebb konklúzió nyerhető, ha feltesszük, hogy f minimális függvény, így már csak nagyjából 4 millió függvény marad.

2.3. Tétel [Wa1]. *Legyen f egy, a (2.1) azonosságot kielégítő minimális többségi függvény az A halmazon, és legyenek a, b, c páronként különböző elemei A-nak. Ha $u = f(a, b, c)$, $v = f(b, c, a)$, $w = f(c, a, b)$ páronként különbözők, akkor $f|_{\langle uvw\rangle} = p$ és $f|_{\langle vuw\rangle} = p$ is teljesül.*

2.2. A négyelemű halmaz esete. Amint a következő lemma mutatja, négyelemű alaphalmaz esetén még több szabályosságot tehetünk fel a vizsgált minimális függvényről.

2.4. Lemma [Wa1]. *Legyen f egy, a (2.1) azonosságot kielégítő minimális többségi függvény az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon. Ha $f(\langle abc\rangle) \subseteq \{a, b, c\}$ akkor vagy $f|_{\langle abc\rangle} = p$ és $f|_{\langle bac\rangle} = p$, vagy $f|_{\langle abc\rangle} \equiv u$ és $f|_{\langle bac\rangle} \equiv v$ teljesül valamely $u, v \in A$ esetén.*

A 2.3. Tétel és a 2.4. Lemma után körülbelül egymillió függvény marad meg, és ez a szám tovább csökkenthető a lehetséges szimmetriák (izomorfizmusok) figyelembevételével. Stratégiánk az, hogy olyan mintázatokat keresünk, amelyek megjelenése a művelettáblázatban garantálja, hogy az adott függvény nem minimális. Kiderül, hogy csak néhány olyan művelettáblázat van, amelyben egyik ilyen minta sem fordul elő. Ez meglehetősen hosszadalmas számolás eredménye, ezért a részleteket mellőzzük. A bizonyítás során támaszkodunk az 1.2. Tételre és a konzervatív minimális többségi függvények leírásársa (lásd [Cs2]). Az eredmény a következő (az M_1, M_2, M_3 függvényeket lásd a 2. táblázatban).

2.5. Tétel [Wa1]. *Ha f a (2.1) azonosságot kielégítő nemkonzervatív minimális többségi függvény az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon, akkor f izomorf az M_1, M_2, M_3, $M_3\,(y, x, z)$ függvények valamelyikével.*

2.3. A minimális klónok. Mindössze három olyan nemkonzervatív függvény maradt, amelynek egyáltalán van esélye arra, hogy minimális legyen (izomorfia és a változók permutációja erejéig). Ezek valóban minimálisak, ugyanis klónjaik izomorfak a háromelemű halmaz minimális többségi klónjaival. (Emlékeztetünk rá, hogy a konzervatív minimális többségi függvények minden véges halmazon ismertek [Cs2].)

2.6. Tétel [Wa1]. *Ha f minimális többségi függvény az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon, akkor f vagy konzervatív, vagy izomorf a 2. táblázatban látható tizenkét többségi függvény valamelyikével. Ezek a függvények három minimális klónba tartoznak, amelyek rendre $1, 3$ és 8 többségi függvényt*

	konzervatív	nemkonzervatív	összesen
minimális függvények	32646	232	32 878
minimális függvények izomorfia erejéig	1653	12	1665
minimális klónok	2401	40	2441
minimális klónok algebra-izomorfia erejéig	126	3	129
minimális klónok klón-izomorfia erejéig	123	3	124

3. TÁBLÁZAT. A minimális többségi függvények és klónok száma a négyelemű halmazon

tartalmaznak. Az M_i *függvény által generált klón izomorf az* m_i *függvény által generált klónnal* $i = 1, 2, 3$ *esetén* (*lásd az* 1.2. *Tételt*). (*A táblázat középső két sora azt jelenti, hogy ha* $\{a, b, c\} = \{1, 2, 4\}$ *vagy* $\{a, b, c\} = \{1, 3, 4\}$, *akkor a függvények értéke* 4 *az* (a, b, c) *elemhármason.*)

Az $A = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon 4, 12, illetve 24 többségi függvény van, ami izomorf az M_1, M_2, illetve M_3 függvénnyel, tehát összesen $4 + 12 + 24 = 40$ nemkonzervatív többségi minimális klón létezik a négyelemű halmazon. Ezek a klónok $4 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 24 \cdot 8 = 232$ többségi függvényt tartalmaznak, így 232 nemkonzervatív minimális többségi függvény van A-n, és ezek $1 + 3 + 8 = 12$ izomorfia osztályba esnek.

Az A halmazon $7^4 = 2401$ konzervatív minimális többségi klón létezik, ez könnyen adódik a Csákány Béla által adott leírásból [Cs2]. Nehezebb probléma megszámolni a konzervatív függvényeket és klónokat izomorfia erejéig. Itt hasznát vehetjük a klónok és varietások közötti kapcsolatnak, valamint annak a ténynek, hogy a többségi függvénnyel rendelkező algebrák kongruencia-disztributív varietást generálnak. A számszerű eredményeket a 3. táblázatban foglaljuk össze.

3. Kevés többségi függvényt tartalmazó minimális klónok

Ebben a fejezetben leírjuk a legfeljebb hét háromváltozós függvényt tartalmazó (III)-as típusú minimális klónokat. A többségi függvény által generált klónok egy kivételes tulajdonsága, hogy a klón minimalitása csupán a benne található háromváltozós függvényeken múlik. A $\mathcal{C}$ klón háromváltozós részét $\mathcal{C}^{(3)}$ jelöli, ezt a halmazt egy négyváltozós művelettel (a háromváltozós függvények kompozíciója) és három konstanssal (a háromváltozós projekciók) ellátott algebrának tekintjük. Ha a $\mathcal{C}$ klónt egy többségi függvény generálja, akkor $\mathcal{C}$ pontosan akkor minimális, ha a $\mathcal{C}^{(3)}$ algebrának nincs valódi nemtriviális részalgebrája.

3.1. Minimális többségi függvények szimmetriái. Először egy általános állítást bizonyítunk be a minimális klónokban található többségi függvények szimmetriáiról. Egy többségi függvényt *ciklikusan szimmetrikusnak* nevezünk, ha invariáns változói ciklikus permutációjára, és *teljesen szimmetrikusnak*, ha invariáns változói összes permutációjára.

Vezessük be az alábbi három kétváltozós műveletet a háromváltozós műveletek halmazán:

$$\begin{aligned} f * g &= f\left(g\left(x, y, z\right), g\left(y, z, x\right), g\left(z, x, y\right)\right); \\ f \bullet g &= f\left(g\left(x, y, z\right), y, z\right); \\ f \circledcirc g &= f\left(x, g\left(x, y, z\right), g\left(x, z, y\right)\right). \end{aligned}$$

A következő állítás a 2.1. Tétel kiterjesztése (vegyük észre, hogy (2.1) bal oldala éppen $g * g$). A $\bullet$ műveletet illetően lásd még [HM] 4.4. Lemmáját.

3.1. Tétel [Wa4]. *A* $*$, $\bullet$ *és* $\circledcirc$ *műveletek asszociatívak, és ha a* $\mathcal{C}$ *klónt egy többségi függvény generálja, akkor* $\mathcal{C}^{(3)} \setminus \mathcal{I}$ *zárt rájuk nézve. Ezért ha* $\mathcal{C}^{(3)}$ *véges, akkor mindhárom műveletre nézve tartalmaz nemtriviális idempotens elemet.*

A fenti tétel az alapja ezen alfejezet fő eredményének, ami J. Dudek és J. Gałuszka csupa kommutatív nemtriviális kétváltozós műveletet tartalmazó minimális klónokról szóló tételének analogonja [DG].

3.2. Tétel [Wa4]. *Legyen $\mathcal{C}$ egy többségi minimális klón véges sok háromváltozós művelettel. Ha $\mathcal{C}$-ben minden nemtriviális háromváltozós művelet ciklikusan kommutatív, akkor $\mathcal{C}$ csak egy nemtriviális háromváltozós műveletet tartalmaz.*

3.2. Legfeljebb négy többségi függvényt tartalmazó minimális klónok. Ha a $\mathcal{C}$ többségi klónban csak egy többségi függvény van, akkor a többségi szabály és a klónaxiómák teljesen meghatározzák $\mathcal{C}^{(3)}$ szerkezetét, és ebben az esetben $\mathcal{C}$ nyilván minimális. Például $[m_1]$ egy ilyen klón, érvényes tehát a következő tétel.

3.3. Tétel [Wa4]. *Ha a $\mathcal{C}$ minimális klón egyetlen többségi függvényt tartalmaz, akkor $\mathcal{C}^{(3)}$ izomorf az $[m_1]^{(3)}$ algebrával.*

Ha f az egyetlen többségi függvény egy ilyen klónban, akkor bármely nemtriviális háromváltozós szuperpozíciója magával f-fel egyezik meg. Speciálisan f teljesen szimmetrikus, és kielégíti az $f\left(f\left(x,y,z\right),y,z\right) = f\left(x,y,z\right)$ azonosságot. Könnyű meggondolni, hogy ez az azonosság a teljes szimmetriával együtt már garantálja, hogy f nem generál önmagán kívül más nemtriviális háromváltozós műveletet. Így tehát a fenti tételben leírt klónok nem mások, mint az alábbi azonosságokkal definiált $\mathcal{M}_1$ varietás részvarietásainak klónjai.

$$f\left(x,y,z\right) = f\left(y,z,x\right) = f\left(y,x,z\right) = f\left(f\left(x,y,z\right),y,z\right),\ f\left(x,x,y\right) = x$$

Ennek a varietásnak végtelen sok részvarietása van, ezért végtelen sok nemizomorf, egyetlen többségi függvényt tartalmazó minimális klón létezik. Hogy ezt belássuk, konstruálunk minden $n > 6$ esetén egy n-elemű szubdirekt irreducibilis (sőt egyszerű) $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_1$ algebrát. Legyen $\mathbb{A}_n = (\{1,2,\ldots,n\};f)$, ahol f egy teljesen szimmetrikus többségi függvény, melynek értékét $1 \le a < b < c \le n$ esetén az alábbi formula adja meg.

$$f\left(a,b,c\right) = \begin{cases} a & \text{ha } \left\lceil \frac{a+c}{2} \right\rceil < b < c \\ b & \text{ha } b = \left\lfloor \frac{a+c}{2} \right\rfloor \text{ vagy } b = \left\lceil \frac{a+c}{2} \right\rceil \\ c & \text{ha } a < b < \left\lfloor \frac{a+c}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Meg lehet mutatni, hogy ha $n > 6$, akkor az $\mathbb{A}_n$ algebra egyszerű. Mivel $\mathcal{M}_1$ kongruencia-disztributív, a Jónsson-lemma szerint $\mathbb{A}_m \notin \mathrm{HSP}(\mathbb{A}_n)$ ha $m > n$, és így a $\mathrm{HSP}(\mathbb{A}_n)$ részvarietások páronként különbözők, a $\mathrm{Clo}\,\mathbb{A}_n$ klónok pedig páronként nemizomorfak.

A kettő többségi függvény esete egyszerűen adódik a 3.2. Tételből.

3.4. Tétel [Wa4]. *Nem létezik olyan minimális klón, amelyben pontosan két többségi függvény van.*

A duális diszkriminátor függvények olyan minimális klónt generálnak, amelyben három többségi függvény van. A következő tétel mutatja, hogy a klón háromváltozós részének izomorfiája erejéig ez az egyetlen ilyen példa.

3.5. Tétel [Wa4]. *Ha a $\mathcal{C}$ minimális klón három többségi függvényt tartalmaz, akkor $\mathcal{C}^{(3)}$ izomorf az $[m_2]^{(3)}$ algebrával.*

Az előző tételt a következőképpen lehet algebrákkal és varietásokkal megfogalmazni. Legyen $\mathcal{M}_2$ az $(\{1,2,3\};m_2)$ algebra háromváltozós azonosságaival definiált varietás. Ha f többségi függvény az A halmazon, akkor $(A;f)$ pontosan akkor term-ekvivalens $\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$ egy elemével, ha $[f]$ minimális klón és pontosan három többségi függvényt tartalmaz. Az $\mathcal{M}_2$ varietásnak végtelen sok olyan részvarietása van, ami nem része $\mathcal{M}_1$-nek, ezért izomorfia erejéig végtelen sok három többségi függvényt tartalmazó minimális klón létezik. Valóban, ha d_A a duális diszkriminátor függvény a legalább háromelemű A halmazon, akkor $(A;d_A\left(z,y,x\right)) \in \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$, és a Jónsson-lemma szerint $(B;d_B\left(z,y,x\right)) \notin \mathrm{HSP}\left(A;d_A\left(z,y,x\right)\right)$ ha A véges és $|A| < |B|$.

3.6. Tétel [Wa4]**.** *Nem létezik olyan minimális klón, amelyben pontosan négy többségi függvény van.*

Összefoglalva az utolsó négy tételt nyerjük ennek a fejezetnek a fő eredményét.

3.7. Tétel [Wa4]**.** *Nem létezik olyan minimális klón, amelyben kettő vagy négy többségi függvény van. Ha a $\mathcal{C}$ minimális klón egy vagy három többségi függvényt tartalmaz, akkor $\mathcal{C}^{(3)}$ izomorf az $[m_1]^{(3)}$ vagy $[m_2]^{(3)}$ algebrával (lásd* 1.2. *Tétel).*

4. Minimális klónok gyengén Abel-féle reprezentációi

A fejezet fő eredménye az 1.5. Tétel általánosítása egy gyengébb term-feltétel használatával. Először definiáljuk az Abel-féle tulajdonság négy változatát (lásd [KK]). Tetszőleges $\mathbb{A}$ algebrára jelölje $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ a $\begin{pmatrix} t(\mathbf{a},\mathbf{c}) & t(\mathbf{a},\mathbf{d}) \\ t(\mathbf{b},\mathbf{c}) & t(\mathbf{b},\mathbf{d}) \end{pmatrix}$ alakú 2×2-es mátrixok halmazát, ahol t egy $n+m$-változós polinomfüggvénye $\mathbb{A}$-nak, és $\mathbf{a},\mathbf{b}\in A^n$, $\mathbf{c},\mathbf{d}\in A^m$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{A}$ algebra

(1) *gyengén Abel-féle*, ha $\begin{pmatrix} u & u \\ u & v \end{pmatrix}\in\mathcal{M}(\mathbb{A})$ esetén $u=v$;
(2) *Abel-féle*, ha $\begin{pmatrix} u & u \\ v & w \end{pmatrix}\in\mathcal{M}(\mathbb{A})$ esetén $v=w$;
(3) *derékszögű*, ha $\begin{pmatrix} u & v \\ w & u \end{pmatrix}\in\mathcal{M}(\mathbb{A})$ esetén $u=v=w$;
(4) *erősen Abel-féle*, ha Abel-féle és derékszögű is.

K. Kearnes bizonyította be, hogy (III)-as és (V)-ös típusú minimális klónnak nem lehet nemtriviális Abel-féle reprezentátiója [Kea], és a bizonyítás valójában azt is mutatja, hogy gyengén Abel-féle reprezentációja sem lehet. Az (I)-es és (IV)-es típusú minimális klónoknak viszont minden reprezentációja Abel-féle, így elegendő a minimális klónnal rendelkező gyengén Abel-féle grupoidokat vizsgálnunk.

4.1. Gyenge Abel-féleség és disztributivitás. A kvázicsoportok elméletében akkor neveznek egy grupoidot „gyengén Abel-félének”, ha kielégíti az

$$(xx)(yz)=(xy)(xz),\qquad (yz)(xx)=(yx)(zx), \tag{4.1}$$

azonosságokat, „Abel-félének” (vagy mediálisnak, vagy entropikusnak) pedig akkor, ha teljesül az $(xy)(zu)=(xz)(yu)$ azonosság (lásd [Kep]). Az egyértelműség kedvéért az utóbbi esetben az *entropikus* jelzőt fogjuk használni. A minimális klónú grupoidok idempotensek, és ilyenkor a (4.1) azonosságok ekvivalensek a *disztributivitással*:

$$x(yz)=(xy)(xz),\qquad (yz)x=(yx)(zx).$$

Minden idempotens Abel-féle grupoid entropikus [Kea], és azt sejthetnénk, hogy az idempotens gyengén Abel-féle grupoidok disztributívak. Nem tudjuk, hogy ez így van-e, de szerencsére céljainkhoz elegendőek a következő lemmában megfogalmazott gyengébb állítások.

4.1. Lemma [Wa2]**.** *Minden idempotens gyengén Abel-féle grupoid kielégíti az alábbi azonosságokat:*

(i) $(xy)(xz)=(x(yz))((xy)(xz))$;
(ii) $(yx)(zx)=((yx)(zx))((yz)x)$;
(iii) $(xy)x=x(yx)$.

Hogy a disztributivitás és a gyenge Abel-féleség közötti kapcsolatot jobban meg tudjuk ragadni, definiáljunk a vizsgált grupoidon egy relációt a következőképpen: $a\sim b$ akkor és csak akkor, ha $ab=a$. A (ii) azonosság szerint minden idempotens gyengén Abel-féle grupoid jobbdisztributív „modulo $\sim$”. Ez így persze még nem értelmes, hiszen $\sim$ nem biztos, hogy kongruencia, sőt lehet, hogy még csak nem is ekvivalenciareláció. Vissza fogjuk azonban vezetni a problémát arra az esetre, amikor $\sim$ kongruenciareláció. Előkészületként megmutatjuk, hogy ha nem csupán az idempotenciát, hanem a klón minimalitását tesszük fel, akkor teljesül legalább az egyik oldali disztributivitás.

4.2. Lemma [Wa2]**.** *Bármely minimális klónú gyengén Abel-féle grupoid teljesíti legalább az egyik disztributív azonosságot.*

4.2. Baldisztributív minimális klónú gyengén Abel-féle grupoidok. Legyen $\mathbb{A}$ egy minimális klónnal rendelkező gyengén Abel-féle grupoid. A 4.2. Lemma szerint az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\mathbb{A}$ baldisztributív. Először azt mutatjuk meg, hogy ha $\sim$ nem kongruenciareláció, akkor $\mathbb{A}$ egy p-ciklikus grupoid. Az alábbi lemmát használjuk, amely egy bizonyos azonosságot kielégítő binér műveletek körében írja le a minimálisakat.

4.3. Lemma [Wa2]. *Ha egy minimális klónú grupoid kielégíti az $x(yz) = xy$ azonosságot, akkor eleme a $\mathcal{D} \cap \mathcal{A}$ vagy a $\mathcal{C}_p$ varietásnak valamely p prímszámra.*

4.4. Tétel [Wa2]. *Ha $\mathbb{A}$ egy olyan minimális klónú gyengén Abel-féle baldisztributív grupoid, amelynek az $a \sim b \Leftrightarrow ab = a$ képlettel definiált $\sim$ reláció nem kongruenciája, akkor $\mathbb{A}$ egy p-ciklikus grupoid valamely p prímszámra.*

Ezek után már feltehetjük, hogy $\mathbb{A}$ egy minimális klónú baldisztributív gyengén Abel-féle grupoid, és $\sim$ kongruencia $\mathbb{A}$-n. A megfelelő $\mathbb{A}/\!\sim$ faktorgrupoid disztributív (a jobbdisztributivitás a 4.1. Lemma (ii) azonossága miatt teljesül), és klónja minimális vagy triviális. Hogy le tudjuk írni ennek a faktorgrupoidnak a szerkezetét, meg kell határoznunk a minimális klónt generáló disztributív műveleteket. Kiderül, hogy a disztributív és entropikus azonosságok ekvivalensek egymással a minimális klónnal rendelkező grupoidok körében, tehát ugyanazokat a grupoidokat kapjuk, mint az 1.4. Tételben.

4.5. Tétel [Wa2]. *Minden minimális klónú disztributív grupoid entropikus, tehát egy ilyen grupoid dualitás erejéig csak affin tér, derékszögű köteg, balnormális köteg, jobbfélháló vagy p-ciklikus grupoid lehet valamely p prímszámra.*

A minimális klónnal rendelkező entropikus grupoidok listáját használva megmutatjuk, hogy $\mathbb{A}$ maga is entropikus. Az $\mathbb{A}/\!\sim$ grupoidról $\mathbb{A}$-ra való áttérés kulcsa az, hogy $\sim$ definíciója szerint tetszőleges t_1, t_2 termekre

$$\mathbb{A}/\!\sim\, \models t_1 = t_2 \iff \mathbb{A} \models t_1 t_2 = t_1.$$

4.6. Tétel [Wa2]. *Ha $\mathbb{A}$ egy olyan minimális klónú gyengén Abel-féle baldisztributív grupoid, amelynek az $a \sim b \Leftrightarrow ab = a$ képlettel definiált $\sim$ reláció kongruenciája, akkor $\mathbb{A}$ entropikus.*

A 4.4. és 4.6. Tételeket az 1.4. Tétellel összevetve kapjuk az alábbi eredményt, csak azt kell észrevennünk, hogy nemtriviális balnormális (jobbnormális) köteg és nemtriviális balfélháló (jobbfélháló) nem lehet gyengén Abel-féle.

4.7. Tétel [Wa2]. *Bármely minimális klónú gyengén Abel-féle baldisztributív grupoid derékszögű köteg, affin tér vagy p-ciklikus grupoid (duálisa) valamely p prímszámra.*

4.3. Minimális klónok term-feltételekkel. Csak (I)-es, (II)-es és (IV)-es típusú minimális klónoknak van nemtriviális gyengén Abel-féle reprezentációja, és az (I)-es és (IV)-es típus esetén minden reprezentáció Abel-féle. Bármely gyengén Abel-féle minimális klónú grupoid bal- vagy jobbdisztributív a 4.2. Lemma szerint, tehát alkalmazhatjuk a 4.7. Tételt (dualizálás után, ha szükséges), és azt kapjuk, hogy egy ilyen grupoid csak derékszögű köteg, affin tér vagy p-ciklikus grupoid (duálisa) lehet. Ez a lista nem tartalmaz új elemet az 1.5. Tételhez képest, tehát a két Abel-féleség egybeesik az absztrakt minimális klónok szintjén.

4.8. Tétel [Wa2]. *Ha egy minimális klónnak van nemtriviális gyengén Abel-féle reprezentációja, akkor van nemtriviális Abel-féle reprezentációja is. Ezért egy ilyen klón csak unér lehet, vagy pedig egy affin tér, egy derékszögű köteg vagy egy p-ciklikus grupoid klónja valamely p prímszámra.*

Az unér algebrák, a derékszögű kötegek és az affin terek mindig Abel-félék. Ez a tény a következő lemmával együtt egy érdekes homogenitási tulajdonságot ad a gyengén Abel-féle reprezentációkra.

4.9. Lemma [Wa2]. *Minden p-ciklikus grupoid gyengén Abel-féle.*

4.10. Tétel [Wa2]**.** *Ha egy minimális klónnak létezik nemtriviális gyengén Abel-féle reprezentációja, akkor minden reprezentációja gyengén Abel-féle.*

Végül minimális klónok derékszögű és erősen Abel-féle reprezentációiról mondunk ki egy tételt. Egy nemtriviális affin tér vagy p-ciklikus grupoid nem lehet derékszögű, viszont az unér algebrák és a derékszögű kötegek mind erősen Abel-félék. Tehát ez a két term-feltétel egybeesik konkrét és absztrakt minimális klónokra is.

4.11. Tétel [Wa2]**.** *Ha egy minimális klónnak van nemtriviális derékszögű reprezentációja, akkor van nemtriviális erősen Abel-féle reprezentációja is, sőt minden reprezentációja erősen Abel-féle. Egy ilyen klón csak unér lehet, vagy pedig egy derékszögű köteg klónja.*

5. Majdnem asszociatív műveletek által generált minimális klónok

Az 1.3. Tétel két lehetséges általánosítását adjuk meg ebben a fejezetben a minimális klónt generáló majdnem asszociatív kétváltozós műveletek leírásával. Hogy ezt pontosabban meg tudjuk fogalmazni, mérnünk kell valahogyan, hogy egy adott művelet milyen messze van attól, hogy asszociatív legyen. Először két ilyen „mértéket" mutatunk be, majd mindkettőre megvizsgáljuk, hogy melyek azok a kétváltozós minimális műveletek, amelyek ezen mérték szerint közel vannak az asszociativitáshoz.

5.1. Az asszociativitás mérése. Egy lehetséges mód az asszociativitás mérésére, hogy meghatározzuk a *nemasszociatív hármasok* számát. Ezt a számot (vagy számosságot) *nemasszociativitási indexnek* nevezzük, és ns-sel jelöljük. Formálisan, bármely $\mathbb{A}$ grupoidra $ns(\mathbb{A}) = |\{(a,b,c) \in A^3 : (ab)\,c \neq a\,(bc)\}|$. Ezt a fogalmat több szerző is tanulmányozta [Cl1, Cl2, DK, KT1,Szá]. Nyilván $\mathbb{A}$ akkor és csak akkor félcsoport, ha $ns(\mathbb{A}) = 0$, és természetes azt mondani, hogy az $\mathbb{A}$ grupoid művelete majdnem asszociatív, ha $ns(\mathbb{A}) = 1$. Az ilyen grupoidokat *Szász-Hájek grupoidoknak* nevezzük (röviden SH-grupoidok). Az SH-grupoidok szerkezetét P. Hájek, T. Kepka és M. Trch vizsgálta részletekbe menően [Há1–Há2,KT3–KT6].

Ha $\mathbb{A}$ egy SH-grupoid, amelynek egyetlen nemasszociatív hármasa (a,b,c), akkor $\mathbb{A}$ bármely részgrupoidja szintén SH-grupoid, vagy pedig félcsoport, attól függően, hogy tartalmazza-e az a, b, c elemeket vagy sem. Speciálisan, $\{a,b,c\}$ akkor és csak akkor generálja $\mathbb{A}$-t, ha minden valódi részgrupoidja félcsoport. Az ilyen grupoidokat *minimális SH-grupoidoknak* nevezzük.

Egy másik módja az asszociativitás mérésének, hogy számba vesszük, hogy az asszociativitásból következő azonosságok közül mennyi (nem) teljesül. Nevezzünk egy B grupoidtermet *zárójelezésnek*, ha minden változó csak egyszer lép fel benne. Ha ezek a változók $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és ebben a sorrendben lépnek fel (ahogy azt többnyire feltesszük), akkor B-t úgy lehet elképzelni, hogy zárójelekkel látjuk el az $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ szorzatot, hogy az $n-1$ szorzás sorrendje egyértelműen meghatározott legyen. Ilyenkor a $B = B(x_1, \ldots, x_n)$ jelölést használjuk.

Az $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ szorzat zárójelezéseinek száma $C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, az $(n-1)$-edik Catalan-szám. Egy félcsoportban ez a C_{n-1} term mind ugyanazt a termfüggvényt szolgáltatja, de egy tetszőleges grupoidban több termfüggvényt adhatnak. Minél több ilyen termfüggvény létezik, annál kevésbé asszociatív a művelet. Az $\mathbb{A}$ grupoid *asszociatív spektrumán* az $s_{\mathbb{A}}(1), s_{\mathbb{A}}(2), \ldots$ sorozatot értjük, ahol $s_{\mathbb{A}}(n)$ az $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ szorzat zárójelezései által indukált termfüggvények száma [CsW]. Tehát az asszociatív spektrum a grupoid által kielégített $B_1(x_1, \ldots, x_n) = B_2(x_1, \ldots, x_n)$ alakú azonosságokról ad (mennyiségi) információt.

Világos, hogy bármely $\mathbb{A}$ grupoidra $s_{\mathbb{A}}(1) = s_{\mathbb{A}}(2) = 1$, és $s_{\mathbb{A}}(3) = 1$ akkor és csak akkor, ha $\mathbb{A}$ félcsoport. Az utóbbi esetben az általános asszociativitás tétele szerint $s_{\mathbb{A}}(n) = 1$ teljesül minden n pozitív egész számra. A legkisebb spektrum tehát, ami a nemasszociatív műveletek körében felléphet, az $1, 1, 2, 1, 1, \ldots$ sorozat, ezért azokat a műveleteket nevezhetnénk majdnem asszociatívnak, amelyeknek a spektruma megegyezik ezzel a sorozattal. Látni fogjuk azonban, hogy nem létezik olyan minimális klónú grupoid, amelynek ilyen kicsi lenne a spektruma. Ezért nagyvonalúbbnak kell lennünk: az 5.7. Tételben azokat a minimális klónt generáló kétváltozós műveleteket fogjuk meghatározni, amelyek spektrumára $s(4) < 5 = C_3$ teljesül.

Az itt bemutatott két asszociativitási mérték között nem látszik szoros kapcsolat. Például az 5.9. Tételben szereplő háromelemű grupoid SH-grupoid, spektruma mégis a lehető legnagyobb: $s(n) = C_{n-1}$ minden n-re.

Megemlítjük még, hogy létezik egy harmadik módszer is az asszociatvitás mérésére, a műveléttáblázatok Hamming-távolságának segítségével. Így kapjuk a *félcsoport-távolság* fogalmát. T. Kepka és M. Trch vizsgálta a kis félcsoport-távolságú grupoidokat és a félcsoport-távolság és a nemasszociativitási index kapcsolatát [KT2].

5.2. Kis spektrummal rendelkező minimális klónok. Célunk a viszonylag kicsi asszociatív spektrummal rendelkező nemasszociatív minimális kétváltozós műveletek meghatározása. Az első három tétel azt mutatja, hogy egy ilyen művelet spektruma nem lehet túl kicsi.

5.1. Tétel [Wa3]. *Ha egy idempotens grupoid kielégíti az*

$$\overleftarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \overrightarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

azonosságot valamely $n \geq 3$ esetén, akkor félcsoport.

5.2. Tétel [Wa3]. *Ha egy idempotens grupoid kielégíti az alábbi két azonosságot valamely $n \geq 3$ esetén, akkor félcsoport.*

$$x_0 \cdot \overleftarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = x_0 \cdot \overrightarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$
$$\overleftarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \cdot x_0 = \overrightarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \cdot x_0$$

5.3. Tétel [Wa3]. *Ha egy grupoid klónja minimális, és kielégíti az*

$$\overleftarrow{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = x_1 \cdot \overleftarrow{x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

azonosságot valamely $n \geq 3$ esetén, akkor félcsoport.

Vizsgáljuk most meg a négyváltozós „asszociativitási feltételeket”. Egy négytényezős szorzatnak öt zárójelezése van:

$$\begin{aligned} B_1 &= x\,(y\,(zu))\,; \\ B_2 &= x\,((yz)\,u)\,; \\ B_3 &= (xy)\,(zu)\,; \\ B_4 &= ((xy)\,z)\,u; \\ B_5 &= (x\,(yz))\,u. \end{aligned}$$

A fenti három tételt az $n = 4$ esetre alkalmazva látható, hogy a lehetséges $\binom{5}{2}$ azonosság legtöbbje nem teljesülhet egy nemasszociatív minimális klónú grupoidban: ha $\mathbb{A}$ klónja minimális és $1 < s_{\mathbb{A}}(4) < 5$ teljesül, akkor $s_{\mathbb{A}}(4) = 4$, és $\mathbb{A}$ vagy a $B_1 = B_2$ azonosságot vagy a duálisát elégíti ki. Ezért itt a majdnem asszociativitást úgy célszerű definiálni, hogy $\mathbb{A}$ vagy a duálisa tartozzon az $x\,(y\,(zu)) = x\,((yz)\,u)$ azonossággal definiált $\mathcal{A}$ varietásba. Ha $\operatorname{Clo}\mathbb{A}$ minimális, akkor $\mathcal{V} = \mathrm{HSP}\,\mathbb{A}$ klónja is az, tehát alkalmazható az 1.3. Tétel a $\mathcal{V}$ varietásbeli félcsoportok leírására. Az alábbi lemma mutatja, hogy miként nyerhetünk ebből információt $\mathcal{V}$-re nézve.

5.4. Lemma [Wa3]. *Legyen $\mathcal{V}$ részvarietása $\mathcal{A}$-nak, és legyen $\mathcal{W}$ a félcsoportok varietásának és $\mathcal{V}$-nek a metszete. Ha a $t_1 = t_2$ azonosság teljesül $\mathcal{W}$-ben, akkor az $xt_1 = xt_2$ azonosság teljesül $\mathcal{V}$-ben (ahol x egy tetszőleges változó).*

A következő lemma alapja a minimális monoidok használata [KSz].

5.5. Lemma [Wa3]. *Tegyük fel, hogy $\mathbb{A}$ egy minimális klónú grupoid, és $M \subseteq \operatorname{Clo}^{(2)}(\mathbb{A})$ tartalmazza az első projekciót és legalább egy nemtriviális elemet, továbbá bármely $f, g, h \in M$ esetén teljesülnek az alábbiak:*

(i) $f\,(g, h) = g$;
(ii) $f\left(g, h^d\right) = f\,(g, e_2) \in M$.

Ekkor $\mathbb{A}$ vagy duálisa a $\mathcal{D}$ vagy a $\mathcal{C}_p$ varietások valamelyikébe tartozik (alkalmas p prímszámra).

Az utóbbi két lemma segítségével meg tudjuk határozni az $\mathcal{A}$ varietás minimális klónú elemeit.

5.6. Tétel [Wa3]. *Legyen $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ egy minimális klónú varietás. Ekkor $\mathcal{V}$ vagy duálisa része a $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{D}$ vagy $\mathcal{RB}$ varietások valamelyikének valamely p prímszámra.*

Ezen alfejezet fő eredménye az alábbi tétel, mely leírja azokat a minimális klónú grupoidokat, amelyek majdnem asszociatívak „spektrális” értelemben.

5.7. Tétel [Wa3]. *Tetszőleges $\mathbb{A}$ grupoidra ekvivalens a következő két állítás:*

(i) *$\mathbb{A}$ klónja minimális, és $1 < s_{\mathbb{A}}(4) < 5$;*
(ii) *$\mathbb{A}$ nem félcsoport, és $\mathbb{A}$ vagy duálisa a $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}$, $\mathcal{C}_p$ vagy $\mathcal{D} \cap \mathcal{A}$ varietások valamelyikébe tartozik (alkalmas p prímszámra).*

Ha ezen feltételek teljesülnek, akkor $s_{\mathbb{A}}(n) = 2^{n-2}$ minden $n \geq 2$ esetén.

5.3. Minimális klónú Szász-Hájek grupoidok. Ebben az alfejezetben azokat a minimális klónt generáló kétváltozós műveleteket határozzuk meg, amelyek az „indexes” értelemben majdnem asszociatívak, vagyis a minimális klónú SH-grupoidokat.

5.8. Tétel [Wa3]. *Tetszőleges $\mathbb{A}$ Szász-Hájek grupoidra ekvivalens a következő két állítás:*

(i) *$\mathbb{A}$ klónja minimális;*
(ii) *$\mathbb{A}$ vagy duálisa a $\mathcal{B}$ varietásba tartozik.*

Végül meghatározzuk a minimális SH-grupoidokat a $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}^d$ varietásokban. A minimális SH-grupoidok szisztematikus leírását T. Kepka és M. Trch kezdte el, de a karakterizáció csak bizonyos típusú SH-grupoidok esetén teljes [KT3-KT6]. Egyetlen kivételtől eltekintve az ilyen típusú grupoidok klónja nem lehet minimális, így a következő tétel új minimális SH-grupoidokat szolgáltat.

5.9. Tétel [Wa3]. *Minden minimális klónnal rendelkező minimális SH-grupoid izomorf vagy duálisan izomorf az alábbi tíz grupoid valamelyikével.*

$\cdot$	a	b	c	d	f	g	h	i
a	a	d	f	d	f	g	d	g
b	h	b	c	h	i	i	h	i
c	c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	g	d	g	g	d	g
f	f	f	f	f	f	f	f	f
g	g	g	g	g	g	g	g	g
h	h	h	i	h	i	i	h	i
i	i	i	i	i	i	i	i	i

$\cdot$	a	b	c	d	f	g
a	a	d	f	d	f	g
b	d	b	c	d	g	g
c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	g	d	g	g
f	f	f	f	f	f	f
g	g	g	g	g	g	g

$\cdot$	a	b	c	e	f
a	a	a	c	f	f
b	b	b	e	e	e
c	c	c	c	c	c
e	e	e	e	e	e
f	f	f	f	f	f

$\cdot$	a	b	c	e	g
a	a	a	g	e	g
b	a	b	e	e	g
c	c	c	c	c	c
e	e	e	e	e	e
g	g	g	g	g	g

$\cdot$	a	b	c	e
a	a	a	c	e
b	b	b	e	e
c	c	c	c	c
e	e	e	e	e

$\cdot$	a	b	c	d	f	g	h
a	a	d	f	d	f	g	d
b	h	b	c	h	g	g	h
c	c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	g	d	g	g	d
f	f	f	f	f	f	f	f
g	g	g	g	g	g	g	g
h	h	h	g	h	g	g	h

$\cdot$	a	b	c	e	f	g
a	a	a	g	f	f	g
b	a	b	e	e	f	g
c	c	c	c	c	c	c
e	e	e	e	e	e	e
f	f	f	f	f	f	f
g	g	g	g	g	g	g

$\cdot$	a	b	c	d	f	h
a	a	d	f	d	f	d
b	h	b	c	h	h	h
c	c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d	d
f	f	f	f	f	f	f
h	h	h	h	h	h	h

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	d	f	d	f
b	d	b	c	d	d
c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d
f	f	f	f	f	f

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	c
b	b	b	b
c	c	c	c

Az 5.7. Tételben és az 5.8. Tételben leírt grupoidok halmaza diszjunkt, tehát nem létezik olyan minimális klónú grupoid amely majdnem asszociatív „spektrális” és „indexes” értelemben is.

Irodalomjegyzék

[Cl1] A. C. Climescu, *Études sur la théorie des systèmes multiplicatifs uniformes I. L'indice de non-associativité,* Bull. École Polytech. Jassy **2** (1947), 347–371. (French)

[Cl2] A. C. Climescu, *L'indépendance des conditions d'associativité,* Bull. Inst. Polytech. Jassy **1** (1955), 1–9. (Romanian)

[Cs1] B. Csákány, *All minimal clones on the three-element set,* Acta Cybernet. **6** (1983), no. 3, 227–238.

[Cs2] B. Csákány, *On conservative minimal operations,* Lectures in Universal Algebra (Szeged, 1983), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **43**, North-Holland, Amsterdam, 1986, 49–60.

[CsG] B. Csákány, T. Gavalcová, *Finite homogeneous algebras I,* Acta Sci. Math. (Szeged) **42** (1980), no. 1-2, 57–65.

[CsW] B. Csákány, T. Waldhauser, *Associative spectra of binary operations,* Mult.-Valued Log. **5** (2000), no. 3, 175–200.

[DK] A. Drápal, T. Kepka, *Sets of associative triples,* Europ. J. Combinatorics **6** (1985), 227–231.

[Du] J. Dudek, *The unique minimal clone with three essentially binary operations,* Algebra Universalis **27** (1990), no. 2, 261–269.

[DG] J. Dudek, J. Gałuszka, *Theorems of idempotent commutative groupoids,* Algebra Colloq. **12** (2005), no. 1, 11–30

[FP] E. Fried,A. F. Pixley, *The dual discriminator function in universal algebra,* Acta Sci. Math. (Szeged) **41** (1979), no. 1-2, 83–100.

[Há1] P. Hájek, *Die Szászschen Gruppoide,* Mat.-Fys. Časopis Sloven. Akad. Vied **15** (1965) no. 1, 15–42. (German)

[Há2] P. Hájek, *Berichtigung zu meiner arbeit "Die Szászschen Gruppoide",* Mat.-Fys. Časopis Sloven. Akad. Vied **15** (1965) no. 4, 331. (German)

[HM] D. Hobby, R. McKenzie, *The structure of finite algebras,* Contemporary Mathematics **76**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[JQ] J. Ježek, R. W. Quackenbush, *Minimal clones of conservative functions,* Internat. J. Algebra Comput. **5** (1995), no. 6, 615–630.

[Kea] K. A. Kearnes, *Minimal clones with abelian representations,* Acta Sci. Math. (Szeged) **61** (1995), no. 1-4, 59–76.

[KK] K. Kearnes, E. W. Kiss, *Finite algebras of finite complexity,* Discrete Math. **207** (1999), no. 1-3, 89–135.

[KSz] K. A. Kearnes, Á. Szendrei, *The classification of commutative minimal clones,* Discuss. Math. Algebra Stochastic Methods **19** (1999), no. 1, 147–178.

[Kep] T. Kepka, *The structure of weakly abelian quasigroups,* Czechoslovak Math. J. **28(103)** (1978), no 2, 181–188.

[KT1] T. Kepka, M. Trch, *Groupoids and the associative law I. (Associative triples),* Acta Univ. Carol. Math. Phys. **33** (1992), no. 1, 69–86.

[KT2] T. Kepka, M. Trch, *Groupoids and the associative law II. (Groupoids with small semigroup distance),* Acta Univ. Carol. Math. Phys. **34** (1993), no. 1, 67–83.

[KT3] T. Kepka, M. Trch, *Groupoids and the associative law III. (Szász-Hájek groupoids),* Acta Univ. Carol. Math. Phys. **36** (1995), no. 1, 17–30.

[KT4] T. Kepka, M. Trch, *Groupoids and the associative law IV. (Szász-Hájek groupoids of type (a, b, a)),* Acta Univ. Carol. Math. Phys. **35** (1994), no. 1, 31–42.

[KT5] T. Kepka, M. Trch, *Groupoids and the associative law V. (Szász-Hájek groupoids of type (a, a, b)),* Acta Univ. Carol. Math. Phys. **36** (1995), no. 1, 31–44.

[KT6] T. Kepka, M. Trch, *Groupoids and the associative law VI. (Szász-Hájek groupoids of type (a, b, c)),* Acta Univ. Carol. Math. Phys. **38** (1997), no. 1, 13–22.

[LP] L. Lévai, P. P. Pálfy, *On binary minimal clones,* Acta Cybernet. **12** (1996), no. 3, 279–294.

[P^3] P. P. Pálfy, *Minimal clones,* Preprint of the Math. Inst. Hungarian Acad. Sci. 27/1984.

[Pł1] J. Płonka, *On groups in which idempotent reducts form a chain,* Colloq. Math. **29** (1974), 87–91.

[Pł2] J. Płonka, *On k-cyclic groupoids,* Math. Japon. **30** (1985), no. 3, 371–382.

[Po] E. Post, *The two-valued iterative systems of mathematical logic,* Annals of Mathematics Studies, no. 5, Princeton University Press, Princeton, 1941.

[PK] R. Pöschel, L. A. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren,* Mathematische Monographien, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979. (German)

[Ros] I. G. Rosenberg, *Minimal clones I. The five types,* Lectures in Universal Algebra (Szeged, 1983), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **43**, North-Holland, Amsterdam, 1986, 405–427.

[Szá] G. Szász, *Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen,* Acta Sci. Math. (Szeged) **15** (1953), 20–28. (German)

[Szcz] B. Szczepara, *Minimal clones generated by groupoids,* Ph.D. Thesis, Université de Montréal, 1995.

[SzM] M. B. Szendrei *On closed sets of term functions on bands,* Semigroups (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1978), pp. 156–181, Lecture Notes in Math., 855, Springer, Berlin, 1981.

[Wa1] T. Waldhauser, *Minimal clones generated by majority operations,* Algebra Universalis **44** (2000), no. 1-2, 15–26.

[Wa2] T. Waldhauser, *Minimal clones with weakly abelian representations,* Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), no. 3-4, 505–521.

[Wa3] T. Waldhauser, *Almost associative operations generating a minimal clone,* Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. **26** (2006), no. 1, 45–737

[Wa4] T. Waldhauser, *Minimal clones with few majority operations,* accepted for publication in Acta Sci. Math. (Szeged)