Szegedi Tudományegyetem
Mesterséges Intelligencia Kutatócsoport

Tanuláselméleti és karakterizációs eredmények Boole-függvény osztályokra

PhD-értekezés tézisei

Szörényi Balázs

Témavezető:

Turán György

Szeged
2007

Bevezetés

Jelen disszertáció első felében elméleti eredményeket tárgyaltunk az elméletrevízió témaköréből. Az elméletrevízió – a tanuláselmélet részeként – azt vizsgálja, hogyan tud a tanuló hatékonyan rekonstruálni egy ismeretlen f_{trg} függvény különböző (az adott tanulási modell által meghatározott) protokollokon keresztül információt szerezve róla. A tanulás szokásos alapszituációjától eltérően azonban itt feltesszük, hogy a tanuló már rendelkezik valamilyen előismerettel erről a függvényről, pontosabban, hogy van egy kiinduló hipotézise (valamilyen formula képében), mely a tanulandó függvényt bizonyos értelemben jól közelíti. A valós életben tipikusan ilyen jellegű szituáció adódik egy szakértői rendszer összeállításakor, melynek első változatát még tovább kell finomítani a rendelkezésre álló példák és egyéb információk felhasználásával. A kezdeti hipotézis ismeretében a tanulás vélhetően jóval hatékonyabban valósítható meg; ezen alapgondolat egyértelműen mutatja a modell fontosságát, és szolgál motivációul annak elméleti vizsgálatához.

A jelen disszertációban ismertetett elméletrevíziós eredmények mind Boole-formulák valamilyen osztályára vonatkoztak; read-once (egyszer olvasó), küszöbfüggvények és projektív DNF formulák hatékony revízionálhatóságát vizsgáltuk elméleti szemszögből.

A disszertáció második felében karakterizációs eredményeket vizsgáltunk, melyek mind Boole-függvények valamely szemantikus, illetve szintaktikus tulajdonságai között mutattak ekvivalenciát. A szintaktikus tulajdonságok közt szerepeltek DNF formulák bizonyos irredundás alakjai, Horn formulák (melyek osztálya igen intenzíven kutatott a mesterséges intelligencia témakörében), diszjunkt DNF-ek (olyan DNF-ek, melyekben a termek páronként ütköznek), és döntési fák (melyek fontossága a számítástudományban megintcsak kiemelkedő – és amelyek szintén felfoghatók a DNF formulák egy részosztályaként). A szemantikus tulajdonságok közt vizsgálat tárgyát képezték az n-dimenziós kocka részkockákkal való lefedésére adott bizonyos megkötések, Boole-függvények értelmezési tartományával kapcsolatos lokális restrikciók, valamely függvény igazsághalmazának egy speciális kritérium szerinti kiterjesztése, és végül bizonyos extrém tulajdonságok.

A tézisfüzetben szereplő tételek, lemmák, stb. számozása megegyezik a disszertációban szereplővel. Mindazonáltal – célul a minél egyszerűbb tárgyalásmódot kitűzve – a megfogalmazások helyenként jellegükben is eltérhetnek az ott szereplőktől.

Elméletrevíziós eredmények

Elméletrevíziós rendszerekkel viszonylag széles körben foglakoznak [17; 27; 28; 34; 35]. Mooney az elsők között volt, akik a téma elméleti vonatkozásait vizsgálták [25]. Ő bizonyos **revíziós operátor**okat vezetett be, melyek a kezdeti hipotézis egyszerű, előre megadott szintaktikus átalakítását teszik lehetővé (mint például egy literál kitörlése a formulából vagy ahhoz való hozzáírása), és azt vizsgálta, hogy annak függvényében, hogy milyen nagyságrendű ilyen átalakításra van minimálisan szükség a revízióhoz, milyen korlátok adhatók a tanuló által felhasznált véletlen példák számára az ún. PAC modellben. Greiner, egy hasonló jellegű modellben, a hipotéziskeresés számítási bonyolultságát vizsgálta [11].

A jelen disszertációban használt mindkét revíziós modell Mooney megközelítésének természetes kiterjesztése valamely ismert tanulási modellre: a query modelre (tanulás kérdések által) illetve a mistake bounded modelre (hibakorlátos tanulás). Ezekben a modellekben a φ kezdeti hipotézis és a

f_{trg} tanulandó függvény $\mathrm{dist}(\varphi, f_{\mathrm{trg}})$ **revíziós távolság**a azt mondja meg, hogy minimálian hányszor kell revíziós operátorokat alkalmaznunk, hogy a kezdeti formulából egy olyan formulát kapjunk, mely ekvivalens a tanulandó függvénnyel.

A query learning modelben a tanuló egy ún. orákulumnak tehet fel kérdéseket a tanulandó függvényről, aki ezen kérdéseket konstans időben megválaszolja. (A modellt Angluin vezette be [3] cikkében.) A legelterjedtebben használt kérdéstípusok a **membership query** (értékre kérdezés) – mikor a tanuló az f_{trg} valamely $\mathbf{x}$ inputon felvett értékét kérdezi le –, illetve az **equivalence query** (ekvivalenciára kérdezés), mikor a tanuló azt kérdezi meg, hogy f_{trg} ekvivalens-e az általa konstruált φ' formulával.

3.1. definíció (Elméletrevízió, query learning model) *Adott $\mathcal{R}$ formulaosztály esetén egy algoritmus* **revíziós algoritmus** *az $\mathcal{R}$ formulaosztályhoz p* **query komplexitással**, *ha bármely olyan f_{trg} függvény esetén, mely reprezentálható valamely $\mathcal{R}$-beli formulával, az algoritmusnak valamely $\varphi \in \mathcal{R}$ formulát inputként adva az legfeljebb $p(\hat{e}, \log n)$ kérdést feltéve az orákulumnak végül visszaadja f_{trg} egy reprezentációját, ahol $\hat{e} = \mathrm{dist}(\varphi, f_{\mathrm{trg}})$. Az algoritmus ezen felül* **hatékony revíziós algoritmus** *az $\mathcal{R}$ formulaoszályhoz, ha p polinom, és a futásidő a φ méretében, $\hat{e}$-ben és a változók számában polinomálisan korlátos. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$ query komplexitása legalább q, ha az $\mathcal{R}$-hez adható bármely revíziós algoritmus query komplexitása $\Omega(q)$.*

Az is gyakran felmerül különböző formulaosztályok revíziója során, hogy vajon elég-e csak az egyik kérdéstípus a hatékony revízióhoz. Ezt a kérdést a disszertációban is érintettük a query modellel foglalkozó fejezetekben. Végül, egy equivalence query-t **szabályos**nak mondunk, ha a kérdéses formula $\mathcal{R}$-beli.

A mistake bounded model (hibakorlátos tanulás) egy on-line tanulási modell, melyben a tanulási folyamat körökre van bontva. Egy-egy körben először a tanuló mindig kap egy $\mathbf{x}$ osztályozandó inputot, majd az algoritmusnak vissza kell adnia egy értéket; végül pedig az algoritmus kap egy címkét. (Zajmentes modellben ez az érték megegyezik azzal, amit f_{trg} számít $\mathbf{x}$-en.) Ha ez a két érték (a címke illetve az algoritmus outputja) eltér, az algoritmus **hibá**t követett el. Az algoritmus **hibakorlátja** a hibáinak maximális száma az f_{trg} tanulandó függvény méretében (mely a legrövidebb $\mathcal{R}$-beli formula hossza, mely ekvivalens f_{trg}-el) a körök összes lehetséges sorozatát figyelembe véve.

3.2. definíció (Elméletrevízió, mistake bounded model) *Adott $\mathcal{R}$ formulaosztály esetén egy algoritmus* **revíziós algoritmus** *az $\mathcal{R}$ formulaosztályhoz p* **hibakorláttal**, *ha bármely olyan f_{trg} függvény esetén, mely reprezentálható valamely $\mathcal{R}$-beli formulával, az algoritmusnak valamely $\varphi \in \mathcal{R}$ formulát inputként adva az legfeljebb $p(\hat{e}, \log n)$ hibát követ el, ahol $\hat{e} = \mathrm{dist}(\varphi, f_{\mathrm{trg}})$. Az algoritmus ezen felül* **hatékony revíziós algoritmus** *az $\mathcal{R}$ formulaoszályhoz, ha p polinom, és ha a futásidő (minden körben, az adott körtől függetlenül) a φ méretében, $\hat{e}$-ben és a változók számában polinomálisan korlátos.*

További (a jelen disszertációban nem szereplő) elméletrevíziós eredmények találhatók a [8–10] cikkekben.

Read-once formulák

A 4. fejezetben read-once függvényekkel foglalkoztunk (egy függvény **read-once** – azaz egyszer olvasó –, ha reprezentálható olyan formulával, melyben minden változó legfeljebb egyszer fordul elő); ezen vizsgálatok alapjául a [9] cikk idevágó eredményei szolgáltak. Ezen függvényosztály elméleti szempontból igen jelentős, tekintve, hogy Boole-függvényeknek egy olyan, nemtriviális részhalmaza, melynek elemei (sok tekintetben) algoritmikusan hatékonyan kezelhetők, ráádasul egy kellemes szemantikus karakterizációja is ismert [12; 16; 26]. A függvényosztályról az is ismert (lásd [5]), hogy hatékonyan tanulható a query model keretein belül, ha a tanuló használhat mind membership mind equivalence query-t. A fejezet fő eredménye, hogy az ott ismertetett `ReviseReadOnce` algoritmus a függvényosztály hatékony revízióját valósítja meg a csak-törléses esetben. (A **csak-törléses eset** azt jelenti, hogy a kezdeti formulából részformulák eltávolításával előállítható egy, az f_{trg} tanulandó függvénnyel ekvivalens formula.)

4.7. tétel *Legyen φ egy n-változós read-once formula, és tegyük fel, hogy az f_{trg} tanulandó függvény előállítható φ-ből részformulák eltávolításával. Ekkor teljesül, hogy* `ReviseReadOnce`(φ)*, legfeljebb $O(\hat{e}\log n)$ query-t használva végül visszaadja f_{trg} egy reprezentációját, ahol $\hat{e} = \mathrm{dist}(\varphi, f_{\mathrm{trg}})$.*

További eredményként ismertettük, hogy az algoritmus által használt kérdések mennyisége nagyságrendben közel áll az optimálishoz.

4.11. tétel *A read-once formulák revíziójának query komplexitása $\Omega(\hat{e}\log(n/\hat{e}))$ a csak-törléses esetben, ahol n a kezdeti formula változóinak száma, $\hat{e}$ pedig a kezdeti formula és a tanulandó függvény revíziós távolsága.*

Végül azt mutattuk meg, hogy az algoritmusban használatos két kérdéstípus bármelyikét mellőzve a függvényosztály revíziója nem valósítható meg hatékonyan:

4.13. tétel *A read-once formulák revíziójának query komplexitása a csak-törléses esetben, mellőzve a membership query-ket és csak* szabályos *equivalence query-ket használva legalább $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ (ahol n a kezdeti formula releváns változóinak száma) még abban az esetben is, ha a revíziós távolság 1.*

4.14. tétel *Jelölje $\hat{e}$ a kezdeti formula és a tanulandó függvény revíziós távolságát, és tegyük fel, hogy tanuló csak $\hat{e} - 1$ equivalence query-t kérdezhet (ezzel szemben a membership query-k számát nem korlátozzuk). Ezen meggszorítások esetén a read-once formulák revíziójának query komplexitása a csak-törléses esetben legalább $n - \hat{e}$, ahol n a kezdeti formula releváns változóinak száma.*

Küszöbfüggvények

Az 5. fejezetben küszöbfüggvényekkel foglalkoztunk; ezen vizsgálatok alapjául a [31] cikk idevágó eredményei szolgáltak. (Egy függvényt **küszöbfüggvény**nek tekintünk, ha reprezentálható változók egy R halmazával és egy θ küszöb értékkel olyan módon, hogy a függvény pontosan azon értékadások esetén ad 1-et, melyek az R-beli változók közül legalább θ-hoz 1-et rendelnek értékül.) A küszöbfüggvények jelentőségét jelzi, hogy (habár a fentinél általánosabb formában megadva) a mesterséges neuronhálók illetve SVM-ek (support vector machine-ek) egyik alap építőköveként használatosak. Küszöbfüggvényekről is ismert, hogy hatékonyan tanulhatók a query model keretein belül, ám ezen függvényosztály esetén ehhez elég csak a membership query-k használata (lásd a [14] cikkben ismertetett algoritmust). A fejezet fő eredménye, hogy az ott ismertetett `ReviseThreshold` algoritmus a függvényosztály hatékony revízióját valósítja meg az általános esetben.

5.5. tétel *Legyen φ a kezdeti formula, f_{trg} pedig a tanulandó függvény; mindketten n-változós küszöbfüggvények. Ekkor* `ReviseThreshold`(φ), *legfeljebb $O(\hat{e}\log n)$ query-t használva végül visszaadja f_{trg} egy reprezentációját, ahol $\hat{e} = \mathrm{dist}(\varphi, f_{\mathrm{trg}})$.*

Ezen felül bizonyításra került, hogy az algoritmus által használt kérdések mennyisége nagyságrendileg lényegében optimális.

5.8. állítás *Küszöbfüggvények revíziójának query komplexitása $\Omega(\hat{e}\log(n/\hat{e}))$, ahol n a kezdeti formula változóinak száma, $\hat{e}$ pedig a kezdeti formula és a tanulandó függvény revíziós távolsága.*

Figyelembe véve, hogy – amint az fent említetésre került – a függvényosztály hatékonyan tanulható csak membership query-k használatával is, jelen esetben még aktuálisabb a kérdés, hogy vajon a hatékony revízióhoz szükség van-e mindkettőre. A válasz megintcsak igenlő.

5.6. tétel *Tegyük fel, hogy a küszöb értéke mind a kezdeti formulában, mind a tanulandó függvényben t, és hogy a tanuló is csak olyan küszöbfüggvényekre kérdezhet equivalence query-t, amelyekben a küszöb szintén t. (Ezzel szemben a membership query-kre semmiféle megkötést nem teszünk.) Ezen megszorítások esetén a küszöbfüggvények revíziójának query komplexitása legalább $n-1$ (ahol n változók száma) még abban az esetben is, amikor a revíziós távolság mindössze 1.*

5.7. tétel *Csak equivalence query-t használva a küszöbfüggvények revíziójának query komplexitása legalább $n-1$ (ahol n a változók száma) még abban az esetben is, amikor a revíziós távolság mindössze 1.*

Végezetül megmutattuk, hogy Littlestone híres `Winnow` algoritmusa (mely a [22] cikkben került ismertetésre), illetve annak egy megfelelő, természetes elméletrevíziós kiterjesztése nem hatékony revíziós algoritmus ezen függvényosztályra.

5.9. állítás `Winnow` *nem hatékony revíziós algoritmus a küszöbfüggvények osztályához. Pontosabban fogalmazva: bármilyen kezdeti súlyvektorral is indítjuk el, $\mathrm{Th}^1_{v_1,\dots,v_n}$ kezdeti hipotézis és $\mathrm{Th}^2_{v_1,\dots,v_n}$ tanulandó függvény esetén* `Winnow` *bizonyos esetekben n hibát követ el.*

Ez azért is meglepő, mert ezen algoritmus az által vált híressé, hogy bizonyos függvények tanulását kimagaslóan hatékonyan valósítja meg, és ráadásul (általánosabb értelemben vett) küszöbfüggvényként reprezentálja a mindenkori hipotézisét.

Projektív DNF formulák

A 6. fejezetben, az elméletrevízióval foglalkozó első rész zárásaként, projektív DNF formulákkal foglalkoztunk; ezen vizsgálatok alapjául a [30] cikk idevágó eredményei szolgáltak.

6.1. definíció *Egy $\varphi = \rho_1 t_1 \vee \dots \vee \rho_\ell t_\ell$, DNF formula k-**projektív DNF**, vagy k-**PDNF**, ha teljesül, hogy $i = 1, \dots, \ell$ esetén ρ_i egy k-term, t_i tetszőleges term és $\rho_i \varphi \equiv \rho_i t_i$. Az n-változós, k-projektív DNF Formulákkal reprezentálható függvények halmazát k-PDNF$_n$ jelöli.*

A diszjunktív normálformájú formulák részosztályát alkotó projektív DNF formulák Valiant [33] cikkében kerültek bevezetésre. (A DNF-ek különböző részosztályainak vizsgálata azáltal kapott még nagyobb hangsúlyt, hogy Alekhnovich-ék [2] cikkükben megmutatták, hogy – hacsak az NP és RP osztályok nem egyenlőek – a DNF-ek osztálya nem tanulható hatékonyan.) A formulaosztály jelentőségét az szolgáltatta Valiant számára, hogy alkalmasnak bizonyultak az ún. projektív tanulásra, melynek lényege, hogy a tanulás, a biológiában megfigyelhető más folyamatokhoz hasonlóan, több szinten, osztott módon történik. A fejezet fő eredménye, hogy az ott ismertetett `RevWinn` algoritmus, mely Valiant tanulóalgoritmusának egy természetes kiterjesztése, a projektív DNF formulák hatékony revízióját valósítja meg a mistake bounded model (hibakorlátozott modell) keretein belül

6.3. tétel *Jelölje φ a kezdőhipotézist, f_{trg} pedig a tanulandó függvényt. Ekkor a* `Rev-`k`-PDNF` *algoritmus hatékonyan fut, és $O(\hat{e} k \log n)$ hibát vét, ahol $\hat{e} = \mathrm{dist}(\varphi, f_{\mathrm{trg}})$.*

Az algoritmus, Valiant eredeti algoritmusához hasonlóan, két szintből tevődik össze. Az alsó szinten egy egyszerű tanulóalgoritmus több példánya kerül futtatásra, melyek mind a tanulandó függvény (pontosabban a függvény értelmezési tartományának) egy kis szeletére (avagy projekciójára) figyelnek csak. A felső szinten megintcsak egy egyszerű tanulóalgoritmus használatos (ezúttal viszont csak egy darab), egyrészt azzal a céllal, hogy megtanulja, hogyan kell az alsó szinten futtatott egyszerű tanulóalgoritmusok által reprezentált hipotéziseket összekapcsolni, másrészt azzal, hogy – megszűrve az információt – az alsó szinten lévő minden egyes algoritmusnak csak az ő számára releváns információt továbbítsa.

A fejezet második részében először azt mutattuk meg, hogy a k-PDNF formulák definíciója lényegében tisztán szemantikus. (Ezen eredmény megfogalmazásához szükségünk van néhány további fogalomra. Egy f Boole függvény **igazsághalmaza** az a $\mathcal{T}(f)$ halmaz, mely pontosan az őt kielégítő inputokból áll. Egy term igazsághalmazát **kocká**nak hívjuk.)

6.5. lemma

(a) *Egy f függvény pontosan akkor k-projektív, ha bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{T}(f)$ esetén létezik egy olyan ρ k-konjunkció, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{T}(\rho)$ és $\mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}(\rho)$ egy kocka.*

(b) *Ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{T}(f)$ esetén létezik egy olyan ρ k-konjunkció, hogy $\mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}(\rho) = \{\mathbf{x}\}$, akkor f k-projektív.*

Ezek után rátértünk a formulaosztály egy, a tanulással kapcsolatos paraméterének, az ún. exclusion dimension (kizárási dimenzió) paraméterének a vizsgálatára (ezen paraméterről bővebben lásd a [4; 15] cikkeket). Ezen eredményt, valamint az exclusion dimension és a query complexity (kérdési bonyolultság) között fennálló, ismert összefüggéseket felhasználva alsó, illetve felső korlátokat adtunk ezen formulaosztály query komplexitására.

6.9. állítás *A k-PDNF$_n$ osztály tanulható $O\left(n\, 2^k \binom{n}{k}^2\right)$ membership és szabályos equivalence query használatával. Másrészről az osztály query komplexitása $\binom{\lfloor n/4 \rfloor}{k} - 1$.*

Karakterizációs Eredmények

A karakterizációs eredmények rendkívül változatos formában vannak jelen (és alkamazva) a matematika és a számítástudomány minden területén. Ezek egyik formája, amikor valamely szintaktikus formában megadott objektumot szemantikus módon is leírhatunk (például, hogy egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csakis akkor osztható öttel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5). Tulajdonképpen a különböző matematikai objektumok vizsgálatának egyik legalapvetőbb módja, hogy egy alternatív reprezentációját vesszük elő (vagy vezetjük le) és annak a segítségével dolgozunk tovább. Ez egyrészt mélyebb bepillantást engedhet az adott objektum valamely tulajdonságához, másrészt (ahogy ez lenni szokott) újabb kérdéseket vet fel. Mindezek egy jeles képviselője a függvények Fourier transzformációja, melynek lényege, hogy valamely függvényt egy ortonormált rendszer lineáris kombinációjaként írjunk le. A módszer rendkívül széles körben alkalmazott a gyakorlatban, és igen intenzíven kutatott az elméletben.

A disszertáció ezen felében karakterizációs eredményekkel foglalkoztunk. Elsőként, az egyik revíziós algoritmus által motiválva, projektív DNF formulák egy osztályának elemeihez adtunk struktúrális jellemzést. Ezután k-term DNF-eket vizsgáltunk, azon formulák teljes leírását megadva, melyek prímimplikánsainak száma a lehető legnagyobb. Ezen eredmény korábbi ismert eredmények sorát egészíti ki. Következőként egy ezzel kapcsolatos eredményt mutattunk meg DNF tautológiákra, melyek teljesítenek egy bizonyos távolság kritériumot. Végezetül a belief revision témakör egy problémája által motiválva (mely témakör rokonságban áll bizonyos fokon az elméletrevízióval) Horn formulák komplemenseinek létezésére adtunk szükséges és elégséges feltételeket.

1-projektív DNF formulák

A 7. fejezetben további, karakterizációs jellegű kérdéseket vizsgáltunk a projektív DNF formulákkal kapcsolatosan; ezen vizsgálatok alapjául a [30] cikk idevágó eredménye szolgált. A projektív DNF-eket szemantikus módon definiáltuk (melyet talán a 6.5. Lemma (a) pontja hangsúlyoz ki a leglátványosabban), ezért is érdekes a fejezet eredménye, mely ezen formulaosztály egy részosztályának, az 1-projektív DNF-eknek egy szemantikus leírását adja meg. Az egyszerűbb megfogalmazás (és bizonyítás) kedvéért egy speciális (egyszerű, természetes követelményeken alapuló) irredundancia fogalmat vezettünk be. $(\mathrm{Lit}(t)$ jelöli t-ben előforduló literálok, $\mathrm{Var}(t)$ a benne előforduló változók halmazát.)

7.1. definíció *A 1-PDNF formula $\varphi = \rho_1 t_1 \vee \cdots \vee \rho_\ell t_\ell$ is* **p-irredundáns**, *ha teljesülnek a következő feltételek:*

(a) $\mathrm{Lit}(\rho_i t_i) \not\subseteq \mathrm{Lit}(\rho_j t_j)$ *minden különböző $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ esetén,*

(b) $\rho_i, \overline{\rho_i} \notin \mathrm{Var}(t_i)$ *minden $1 \leq i \leq \ell$ esetén,*

(c) *ha $\ell \geq 3$, akkor $\rho_i \neq \overline{\rho_j}$ minden különböző $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ esetén.*

Egyébként φ **p-redundáns**.

Azt is tárgyaltuk, hogy bármely 1-PDNF formula könnyen p-irredundáns alakra hozható.

7.3. tétel *Egy φ formula akkor és csakis akkor p-irredundáns alakú 1-PDNF, ha φ vagy*

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{s} (\rho_{i,1} t_i \vee \cdots \vee \rho_{i,\ell_i} t_i),$$

alakú, ahol $\rho_{i,r} \notin \mathrm{Var}(t_i)$ és $\overline{\rho_{i,r}} \in \mathrm{Lit}(t_j)$ minden különböző $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ és minden $1 \leq r \leq \ell_i$ esetén, és ezen felül az is teljesül, hogy a $\rho_{i,r}$ projekciók mind különböző változókon alapulnak; vagy

$$\varphi = vt \vee \overline{v}t' \ ,$$

alakú, ahol $v \notin \mathrm{Var}(t)$ és $\overline{v} \notin \mathrm{Var}(t')$.

k-term-DNF formulák a lehető legnagyobb számú prímimplikánsokkal

Egy t term **implikánsa** egy Boole függvénynek, ha a t-t kielégítő értékadások a függvényt is mind kielégítik, illetve **prímimplikánsa**, ha ez a tulajdonság már egy olyan termre sem teljesül, melyet t-ből literálok elhagyásával kaphatunk. A 8. fejezetben egy DNF termjeinek illetve prímimplikánsainak száma közti kapcsolatot vizsgáltuk; ezen vizsgálatok alapjául a [29] cikk eredményei szolgáltak.

Először, a 8.3. szekcióban a témában ismert korábbi eredményeket ismertettük (a teljesség kedvéért bizonyítással együtt); többek közt azt, hogy egy K tagú DNF-nek legfeljebb $2^K - 1$ prímimplikánsa lehet [6; 21; 24], és hogy ez a korlát éles [19; 21; 24]. A fejezet fő eredménye, hogy teljes karakterizációját adja azon DNF-eknek, melyek prímimplikánsainak száma eléri ezt a felső korlátot. (Az ilyen DNF-eket **maximális DNF**-eknek nevezzük.)

Az eredmény kimondása előtt néhány fogalmat kell bevezetnünk. Egy DNF tautológia **BT-DNF**, ha fa-struktúrájú, azaz ha van egy olyan v változó, mely a formula minden termjében előfordul; van egy olyan u változó, mely a formula minden olyan termjében előfordul, amiben v negáltan szerepel, és van egy olyan w változó, mely a formula minden olyan termjében előfordul, amiben v negálatlanul szerepel; és így tovább. Egy DNF tautológiát **ND**-nek nevezünk, ha az egy olyan BT-DNF, melyben minden term minden másik termmel pontosan egy változóban ütközik. (Két term **ütközik** egy változóban, ha az az egyikben negáltan, a másikban pedig negálatlanul szerepel.) Egy DNF-re azt mondjuk, hogy **NUD**, ha teljesül rá, hogy minden olyan változót elhagyva belőle, mely vagy csak negáltan, vagy csak negálatlanul szerepel benne, akkor az így előálló DNF egy ND. Ezek után kimondhatjuk a fő eredményt.

8.1. tétel *Egy DNF pontosan akkor maximális DNF, ha NUD.*

A bizonyítás során a problémát visszavezettük arra a felismerésre, hogy az ND definíciójából elhagyható az a feltétel, hogy BT-DNF.

8.11. lemma (ND lemma [18]) *Ha egy DNF tautológiában minden tag minden másik taggal pontosan egy változóban ütközik, akkor az egy ND.*

Diszjunkt DNF tautológiák kettes ütközési korláttal

A 9. fejezetben az ND lemma egy általánosítását vizsgáltuk. Ezen vizsgálatok alapjául a [32] cikk eredményei szolgáltak. Azt mutattuk meg, hogy ha egy DNF-ben minden tag minden másik taggal legalább egy, de legfeljebb két változóban ütközik, akkor szintén rendelkezik a fent említett fa jellegű struktúrával.

9.1. tétel *Ha egy DNF-ben minden tag minden másik taggal egy vagy két változóban ütközik, akkor az* BT-DNF.

(Kifejtettük továbbá azt is, hogy ez az eredmény hogyan viszonyul különböző további, szemantikus illetve szintaktikus megfontolások által vezérelt általánosításokhoz.) Egy példán keresztül demonstrálva azt is szemléltettük, hogy ha a megengedett ütközések számát háromra növeljük, akkor ez a struktúra már nem jelenik meg minden esetben. Ez a probléma egy speciális esete a [23] cikkben tárgyalt problémának, mely azzal foglalkozik, hogy egy adott DNF tautológia esetén mekkora a legkisebb olyan döntési fa, amely olyan DNF tautológiát generál, aminek minden tagja az adott DNF valamely termjének kibővítése plusz literálokkal.

Felbontható Horn formulák

Horn formula egy olyan CNF formula, amelyben minden klóz legfeljebb egy negálatlan változót tartalmaz. **Horn függvény** egy olyan függvény, mely reprezentálható Horn formulával. A 10. fejezetben ún. felbontható Horn formulákat vizsgáltunk; ezen vizsgálatok alapjául a [20] cikk eredményei szolgáltak.

A felbontható Horn formulák a Horn komplemensek segítségével kerültek bevezetésre. ($f \leq g$ azt jelöli, hogy f implikálja g-t; $f \lneq g$ pedig azt, hogy $f \leq g$, de $f \neq g$.)

10.5. definíció (f-komplemens) *Adott f és g Horn függvények esetén, ahol $f \leq g$, egy h Horn függvényről azt mondjuk, hogy f-**komplemense** g-**nek**, ha $f \lneq h$ és $f = (g \wedge h)$.*

10.6. definíció (felbontható Horn függvény) *Egy f Horn függvény* **felbontható**, *ha minden $f \leq g \neq 1$ Horn függvénynek van f-komplemense.*

A Horn formulák igen fontos szerepet játszanak a mesterséges intelligenciában, illetve általában a számítástudományban, melynek alapja, hogy a formulaosztály kifejezőképessége relatíve igen jó, és emellett algoritmikusan hatékonyan kezelhető. A felbonthatóság fogalma a belief revision témaköréből származik [1], mely témakör főként tudásbázisok (hétköznapi értelemben vett) racionalitási tulajdonságokat teljesítő revíziójával foglalkozik, melyeket tipikusan posztulátumok formájában fogalmaznak meg. A felbonthatóság fogalmát általános logikákra fogalmazták meg a [7] cikkben, ahol megmutatták, hogy az AGM posztulátumok [1] (a legismertebb posztulátumok egyike a témakörben) teljesülésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az adott logikában létezzen ún. felbontható revíziós operátor. A fejezet fő eredménye a 10.10. tétel, melyben karakterizáltuk, hogy milyen esetkben van egy Horn formulának egy másik (őt implikáló) Horn formulára nézve komplemense.

10.10. tétel *Adott $\varphi \not\equiv 1$ és $\varphi \leq \psi$ Horn formulákra a következők ekvivalensek:*

(a) *ψ-nek van φ-komplemense,*

(b) *$\hat{\varphi} \not\leq \psi$,*

(c) *ψ valamely D klózára $\mathcal{B}_\varphi(D) \not\leq D$.*

[1] Ezen témakör rokon az elméletrevízióval, így a disszertáció végén egy fejezet erejéig bizonyos értelemben újra találkozik a disszertáció két fő témája.

Szükségünk van még a majdnem anti-monoton függvény fogalmára is. (Egy függvény **anti-monoton**, ha hagyományos értelemben véve monoton csökkenő.)

10.3. definíció (majdnem anti-monoton) *Egy függvény* **majdnem anti-monoton**, *ha létezik olyan g monoton függvény, melyre $\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}(g) \cup \{\mathbf{1}\}$,*

A 10.10. tétel felhasználásával végül megadtuk a felbontható Horn formulák egy teljes leírását.

10.13. tétel *Egy Boole-függvény pontosan akkor Horn függvény, ha majdnem anti-monoton.*

Mint megmutattuk, ha létezik, a komplemens hatékonyan konstruálható, szemben az irodalomban egy korábban vizsgált, valamelyest szigorúbb komplemens fogalommal, melynek meglétének eldöntése NP-nehéz. Az eredmény a közölt formában pusztán kombinatorikai jellegű, ám mindez egy Horn formula alapú módszer első lépéseként került vizsgálatra a [20] cikkben, melynek jövőbeni célja a hatékony revízió ötvözése a belief revison által vizsgált racionalitási tulajdonságokkal.

Hivatkozások

[1] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change: partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.

[2] M. Alekhnovich, M. Braverman, V. Feldman, A. R. Klivans, and T. Pitassi. Learnability and automatizability. In *Proc. 45th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2004)*, pages 621–630. IEEE Computer Society Press, 2004.

[3] D. Angluin. Queries and concept learning. *Machine Learning*, 2(4):319–342, 1988.

[4] D. Angluin. Queries revisited. *Theoretical Compututer Science*, 313(2):175–194, 2004. Earlier version appeared in 12th ALT, 2001.

[5] D. Angluin, L. Hellerstein, and M. Karpinski. Learning read-once formulas with queries. *Journal of the ACM*, 40(1):185–210, 1993.

[6] A. K. Chandra and G. Markowsky. On the number of prime implicants. *Discrete Mathematics*, 24:7–11, 1978.

[7] G. Flouris, D. Plexousakis, and G. Antoniou. On generalizing the AGM postulates: preliminary results and applications. In *Proc. 10th Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR 2004)*, pages 171–179, 2004.

[8] J. Goldsmith and R. H. Sloan. New Horn Revision Algorithms. *Journal of Machine Learning Research*, 6:1919–1938, 2005.

[9] J. Goldsmith, R. H. Sloan, B. Szörényi, and Gy. Turán. Theory revision with queries: Horn, read-once, and parity formulas. *Artificial Intelligence*, 156:139–176, 2004.

[10] J. Goldsmith, R. H. Sloan, and Gy. Turán. Theory revision with queries: DNF formulas. *Machine Learning*, 47(2–3):257–295, 2002.

[11] R. Greiner. The complexity of theory revision. *Artificial Intelligence*, 107(2):175–217, 1999.

[12] V. Gurvich. On repetition-free Boolean functions. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 32(1):183–184, 1977. (In Russian).

[13] P. L. Hammer and A. Kogan. Essential and Redundant Rules in Horn Knowledge Bases. In *Proc. 28th Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS 1995*, 209–218, 1995.

[14] T. Hegedűs. On training simple neural networks and small-weight neurons. In *Proc. 1st Eurpean Conference on Computational Learning Theory (EuroColt 1993)*, pages 69–82. Oxford University Press, 1994.

[15] L. Hellerstein, K. Pillaipakkamnatt, V. Raghavan, and D. Wilkins. How many queries are needed to learn? *Jourrnal of the ACM*, 43(5):840–862, 1996.

[16] M. Karchmer, N. Linial, I. Newman, M. Saks, and A. Wigderson. A combinatorial characterization of read-once formulae. *Discrete Mathematics*, 114:275–282, 1993.

[17] M. Koppel, R. Feldman, and A. M. Segre. Bias-driven revision of logical domain theories. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 1:159–208, 1994.

[18] O. Kullmann. The combinatorics of conflicts between clauses. In *Proc. 6th Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT 2003)*, vol.2919 of LNCS, pages 426–440. Springer, 2003.

[19] J.-M. Laborde. Sur le cardinal maximum de la base complète d'une fonction booléenne, en fonction du nombre de conjunctions de l'une de ses formes normales. *Discrete Mathematics*, 32:209–212, 1980.

[20] M. Langlois, R. H. Sloan, B. Szörényi, and Gy. Turán. Horn formulas, decomposability and Belief Revision. Manuscript.

[21] A. A. Levin. Comparative complexity of disjunctive normal forms. *Metody Discret. Analiz.*, 36:23–38, 1981. (In Russian)

[22] N. Littlestone. Learning quickly when irrelevant attributes abound: A new linear-threshold algorithm. *Machine Learning*, 2(4):285–318, 1988.

[23] L. Lovász, M. Naor, I. Newman, and A. Wigderson. Search problems in the decision tree model. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 8:119–132: 1995.

[24] C. McMullen and J. Shearer. Prime implicants, minimum covers, and the complexity of logic simplification. *IEEE Transactions on Computers*, 35(8):761–762, 1986.

[25] R. J. Mooney. A preliminary PAC analysis of theory revision. In *Computational Learning Theory and Natural Learning Systems, volume III: Selecting Good Models*, pages 43–53. MIT Press, 1995.

[26] D. Mundici. Functions computed by monotone Boolean formulas with no repeated variables. *Theoretical Compututer Science*, 66:113–114, 1989.

[27] D. Ourston and R. J. Mooney. Theory refinement combining analytical and empirical methods. *Artificial Intelligence*, 66(2):273–309, 1994.

[28] B. L. Richards and R. J. Mooney. Automated refinement of first-order Horn-clause domain theories. *Machine Learning*, 19(2):95–131, 1995.

[29] R. H. Sloan, B. Szörényi, and Gy. Turán. On k-term DNF with the maximal number of prime implicants. Accepted for publication at *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. Earlier version appeared as Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC) Technical Report TR05-023.

[30] R. H. Sloan, B. Szörényi, and Gy. Turán. Projective DNF Formulae and Their Revision. Accepted for publication at *Discrete Applied Mathematics*. Earlier version appeared in 16th COLT, 2003.

[31] R. H. Sloan, B. Szörényi, and Gy. Turán. Revising threshold functions. *Theoretical Computer Science*, 382(3):198–208, 2007.

[32] B. Szörényi. Disjoint DNF Tautologies with Conflict Bound Two. Accepted for publication at *Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation*.

[33] L. G. Valiant. Projection learning. *Machine Learning*, 37(2):115–130, 1999.

[34] S. Wrobel. *Concept Formation and Knowledge Revision*. Kluwer, 1994.

[35] S. Wrobel. First order theory refinement. In *Advances in ILP*, pages 14–33. IOS Press, Amsterdam, 1995.