

# Véges geometriák, gráfok, csoportok és kapcsolataik

Doktori értekezés tézisei

Ruff János

Témavezető: Dr. Kiss György

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola  
Szegedi Tudományegyetem, TTIK  
Bolyai Intézet

2010

# 1. Szemioválisok

A disszertáció a szerző négy cikkén alapul [32, 9, 31, 34]. Az első két fejezetben *szemikvadratikus halmazok* egy speciális típusára, az ún. *szemioválisokra*, vonatkozó eredményeinket tárgyaljuk. A szemikvadratikus halmazok fogalmát Buekenhout vezette be 1973-ban. Azóta sok próbálkozás történt az osztályozásukra, de az általános probléma még nem megoldott. A klasszikus példák szemioválisokra polarításokból (oválisok és unitálok), továbbá a blokkoló halmazok köréből (csúcsnélküli háromszög) származtathatók. A szemioválisok tanulmányozását a kriptográfiai alkalmazásai is motiválják.

**1.1. Definíció.** *Legyen  $\Pi$  egy  $q$ -ad rendű projektív sík. Egy  $S$  nem-üres ponthalmazt a síkon szemioválisnak nevezünk, ha minden  $P$  pontján keresztül pontosan egy olyan  $t_P$  egyenes létezik, amire  $S \cap t_P = \{P\}$ . Ezt az egyenest az  $S$   $P$ -beli érintőjének nevezzük.*

Kis rendű síkok esetén a méretek teljes spektruma és a projektíven nem izomorf szemioválisok száma egyaránt ismert.

Thas és Hubaut egy több mint 35 éves eredménye szerint  $q + 1 \leq |S| \leq q\sqrt{q} + 1$ , ahol mindkét korlát éles [46], [28].

Bemutatunk néhány régebbi, hosszú szelőkkel rendelkező szemioválisokra vonatkozó eredményt is, továbbá megmutatjuk, hogy ha a szemiovális három egyenes egyesítése tartalmazza, akkor a méretére sokkal jobb korlátok adhatók:

**1.2. Állítás.** [32] *Legyen  $S$  egy szemiovális a  $\Pi$ ,  $q$ -ad rendű projektív síkon. Ha  $S$ -et a sík valamely három egyenesének egyesítése tartalmazza, akkor*

$$\frac{3(q-1)}{2} \leq |S| \leq 3(q-1).$$

Az értekezés első két fejezetének fő célja, hogy karakterizáljuk az olyan szemioválisokat, amik benne vannak a sík három vagy kevesebb egyenesének egyesítésében.

Az az eset, amikor a szemiovális háromnál kevesebb egyenes egyesítésében is benne van, egyszerűen kezelhető. Ha három egyenes egyesítése tartalmazza, akkor két különböző esetet kell megkülönböztetnünk.  $PG(2, q)$ -ban teljes karakterizációt adunk abban az esetben, amikor a három egyenes nem egy pontra illeszkedik. Egyszerű additív csoportelméleti eszközöket, differencia-halmazokra vonatkozó eredményeket és kombinatorikus állításokat használva a következőt bizonyítjuk:

**1.3. Tétel.** [32] *Legyen  $S$  egy olyan szemiovális a  $PG(2, q)$  síkon, amit három, nem egy pontra illeszkedő egyenes egyesítése tartalmaz. Tegyük fel, hogy*

$S$ -et nem tartalmazza két egyenes egyesítése, azaz  $L_i \setminus \{P_j, P_k\} \neq \emptyset$ , ahol  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Ekkor  $S$  az alábbi három osztály valamelyikéhez tartozik:

1.  $S$ -nek van egy  $(q - 2)$ -szelője és két  $(t + 1)$ -szelője valamely alkalmas  $t$ -re. Ilyen szemioválisok csak  $q = 4$  és  $t = 1$ ,  $q = 8$  és  $t = 4$  vagy  $q = 32$  és  $t = 26$  esetekben léteznek.
2.  $S$ -nek két  $(q - 1)$ -szelője és egy  $k$ -szelője van. Ilyen szemiovális minden  $1 < k < q$  esetén létezik.
3.  $S$ -nek három  $(q - 1 - d)$ -szelője van. Ilyen szemioválisok pontosan akkor léteznek, ha  $d \mid (q - 1)$ .

A szemiovális fogalmának egy lehetséges általánosítását is bevezetjük és néhány, Csajbók és Kiss nevéhez fűződő, erre az általánosításra vonatkozó tételt ismertetünk [15].

Az első fejezet második felében az olyan szemioválisokat tanulmányozzuk, amelyeket három, egy ponton átmenő egyenes egyesítése tartalmaz. Ez az eset jóval bonyolultabb, mint az előző. Bebizonyítjuk a következőt:

**1.4. Tétel.** [9] *Ha  $S$  egy szemiovális a  $\Pi_q$ , ( $q > 3$ ) síkon, amit három, egy ponton átmenő egyenes egyesítése tartalmaz, akkor  $|S| \leq 3\lceil q - \sqrt{q} \rceil$ .*

Azt is megmutatjuk, hogy a korlát éles:

**1.5. Példa.** [9] *Legyen  $q = s^2$  és legyenek  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  egy pontra illeszkedő egyenesek  $PG(2, q)$ -ban. Válasszuk  $\bar{\ell}_1 \subset \ell_1$ ,  $\bar{\ell}_2 \subset \ell_2$ , és  $\bar{\ell}_3 \subset \ell_3$  Baer része-gyeneseket úgy, hogy bármely páronként különböző  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  esetén a  $\mathcal{B}_{j,k} = \langle \bar{\ell}_j, \bar{\ell}_k \rangle$  Baer részsík  $\ell_i$  egyenest csak a közös  $C$  pontban metszi. Ekkor  $S = (\ell_1 \setminus \bar{\ell}_1) \cup (\ell_2 \setminus \bar{\ell}_2) \cup (\ell_3 \setminus \bar{\ell}_3)$  szemiovális  $3(q - \sqrt{q})$  számú ponttal.*

A példában szereplő szemioválisok rendelkeznek egy olyan extra tulajdonsággal, ami miatt bevezetjük a *szabályos szemiovális* fogalmát. Megadjuk a  $PG(2, q)$ -beli szemioválisok egy algebrai leírását és ezt használva a szabályos szemioválisokat tanulmányozzuk. A következőt bizonyítjuk:

**1.6. Tétel.** [9] *Ha  $p$  páratlan prím, akkor nincs szabályos szemiovális a  $PG(2, p)$  síkon.*

Klasszikus csoportfaktorizációs eredményeket felhasználva a szabályos szemioválisok teljes karakterizációját adjuk a  $PG(2, p^2)$  síkon, ahol  $p$  páratlan prím:

**1.7. Tétel.** [9] *Legyen  $p$  páratlan prím. Ha  $S$  szabályos szemiovális a  $PG(2, p^2)$  síkon és  $S$ -et az  $\ell_1, \ell_2$  és  $\ell_3$  egyenesek egyesítése tartalmazza, akkor  $\mathcal{L} \setminus S$  pont-halmaz leírható az alábbi módon:*

$$\{(-1, a, 1), (0, b, 1), (1, i, ci + f(c)) : a, b, c \in GF(p)\} \cup \{C\},$$

ahol  $C = (0, 1, 0)$ ,  $i^2 = \varepsilon$  valamely  $\varepsilon$ ,  $GF(p)$ -beli nem-négyzet elemre,  $GF(p^2)$  a  $GF(p)$  test  $i$ -vel vett bővítése és  $f$  a  $GF(p)$  egy permutációja.

Vizsgáljuk az  $|S| < 3(q - \sqrt{q})$  feltételt teljesítő szabályos szemioválisokat. Az ilyen szemioválisok létezésére az alábbi oszthatósági feltételeket kapjuk:

**1.8. Tétel.** [9] *Legyen  $q = p^m$  páratlan. Ha  $S$  szabályos szemiovális, amire  $|S| = 3(p^m - p^l)$ ,  $m/2 < l < m$  a  $PG(2, q)$  síkon, akkor*

$$(p - 1)(p^{2l-m} - 1)^2 \mid (p^{m-l} - 1).$$

Egy másik, szabályos szemioválisokra vonatkozó eredményünk új szükséges feltételt ad a létezésükre:

**1.9. Tétel.** [9] *Legyen  $p$  páratlan prím. Ha  $S$  szabályos szemiovális a  $PG(2, p^m)$  síkon és*

$$m \leq \begin{cases} (p - 1)^2 & p \equiv -1 \pmod{4} \\ 2(p - 1)^2 & p \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

akkor  $|S| = 3(q - \sqrt{q})$ .

Ezek az eredmények alapozzák meg a végső sejtésünket, ami szerint nem léteznek a fenti típustól különböző szabályos szemioválisok.

## 2. Adott fokszámú és átmérőjű nagy Cayley gráfok

A  $(\Delta, D)$ -probléma (vagy *fokszám/átmérő probléma*) egy gráf legnagyobb lehetséges csúcsszámának meghatározása, ha a gráf maximális foka  $\Delta$ , átmérője pedig  $D$ .

Emlékeztetünk Moore régi eredményére:

**2.1. Tétel.** [27] *Legyen  $\Gamma$  véges, egyszerű gráf. Jelölje  $n(\Delta, D)$  a legnagyobb lehetséges csúcsszámát, ha a maximális fok  $\Delta$  az átmérő pedig legfeljebb  $D$ . Ha  $\Delta > 2$ , akkor:*

$$n(\Delta, D) = \sum_{i=0}^D n_i \leq \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2}.$$

Vizsgálatainkban a *lineáris Cayley gráfok* esetére szorítkozunk. Mutatunk néhány konstrukciót, ahol a kapott gráfok javítanak a korábban ismert általános, csúcstranzitív gráfokra vonatkozó alsó korláton. Kis számú csúcs esetén összehasonlítjuk ezeket az ismert legnagyobb csúcstranzitív, azonos

paraméterekkel rendelkező gráfokkal. Kiderül, hogy a probléma az általunk tárgyalt esetben tulajdonképpen a véges projektív terek bizonyos speciális tulajdonságú ponthalmazainak, az ún. *szaturáló halmazoknak* a keresésére redukálódik. A konstrukcióinkban szereplő gráfok *teljes ívekből, süvegekből* és egyéb, a véges projektív terekben definiált objektumokból kaphatók meg. A már korábban is ismert, csúcstranzitív gráfokra vonatkozó általános alsó korlát:

**2.2. Tétel.** *Csúcstranzitív gráfok esetén:*

$$n(\Delta, 2) \geq \left\lfloor \frac{\Delta + 2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{\Delta + 2}{2} \right\rceil.$$

Ezt bizonyos fokszámok esetén megjavítjuk:

**2.3. Tétel.** [31] *Legyen  $\Delta = 27 \cdot 2^{m-4} - 1$ ,  $m > 7$ . Ekkor*

$$n(\Delta, 2) \geq \frac{256}{729}(\Delta + 1)^2.$$

*Ha  $q > 3$  prímhatalvány és  $\Delta = 2q^2 - q - 1$ , akkor:*

$$n(\Delta, 2) > \frac{1}{4} \left( \Delta + \sqrt{\frac{\Delta}{2} + \frac{5}{4}} \right)^2.$$

### 3. Rózsablak gráfok

A *rózsablak gráf* fogalmának bevezetése Wilson nevéhez fűződik [41, 47].

**3.1. Definíció.** *Legyenek  $n \geq 3$  és  $1 \leq a, r \leq n - 1$ , természetes számok. Az  $R_n(a, r)$  rózsablak gráf csúcshalmaza:  $\{x_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{y_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$  az élek pedig:*

$$\{\{x_i, x_{i+1}\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{\{y_i, y_{i+r}\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{\{x_i, y_i\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{\{x_{i+a}, y_i\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Wilsont először az  $R_n(a, r)$  gráfok zárt felületekbe történő, *forgásszimmetrikus térképként (rotary map)* történő beágyazásai érdekelték. Számos példát adott ilyen forgásszimmetrikus térképekre. Felsorolta azokat az  $n$ ,  $a$ ,  $r$  paramétereket, amelyekre  $R_n(a, r)$  rózsablakgráfok forgásszimmetrikus térképként beágyazhatók és megfogalmazta azt a sejtést, miszerint ez a lista teljes. Egy  $\mathcal{M}$  térkép (*map*) a  $\Gamma$  véges, összefüggő gráf egy felületre történő beágyazása olyan módon, hogy az a felületet egyszeresen összefüggő tartományokra ossza, mely tartományokat  $\mathcal{M}$  *lapjainak* nevezzük. Minden  $f$  laphoz tartozik egy zárt séta  $\Gamma$ -ban, ahol az élek  $f$  határán vannak, ezekre is  $\mathcal{M}$

lapjaiként hivatkozhatunk.  $\mathcal{M}$  egy *automorfizmus* alatt  $\Gamma$  egy olyan automorfizmusát értjük, ami megőrzi a lapokat. A [48] terminológiáját követve  $\mathcal{M}$ -et *forgásszimmetrikus térképnek* (*rotary map*) nevezzük, ha vannak olyan  $R$  és  $S$  gráf automorfizmusok, ahol  $R$  ciklikusan permutálja valamely  $f$  lap egymást követő éleit és  $S$  ciklikusan permutálja az  $f$  lap valamely  $v$  csúcsából kiinduló éleket. Ekkor  $\mathcal{M}$  automorfizmusainak csoportja  $\text{Aut}(\mathcal{M})$  tranzitíven hat a csúcsok, az élek és a lapok halmazán is. Megjegyezzük, hogy  $R$  létezése biztosítja, hogy  $f$  határoló köre egy ún. *konzisztens köre*  $\Gamma$  gráfnak, részleteként lásd [6, 14, 38]. Ha a forgásszimmetrikus térképhez tartozik egy olyan  $T$  automorfizmus is, ami ‘megfordítja’ az  $f$  lap egy  $e$  élet, de megőrzi a lapot, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathcal{M}$  *reflexibilis*. Másrészt ha ilyen automorfizmus nem létezik, akkor  $\mathcal{M}$ -et *királisnak* nevezzük. Az egyik, térképekre vonatkozó központi kérdés, hogy mely gráfoknak van forgásszimmetrikus térképként történő beágyazása egy zárt felületre [7].

Wilson az alábbi három, rózsablak gráfokra vonatkozó kérdést fogalmazta meg [47]-ben:

**3.2. Kérdés.** [47] *Legyenek  $n \geq 3$  és  $1 \leq a, r \leq n - 1$  természetes számok,*

- (i) *Milyen  $n, a$  és  $r$  paraméterek esetén éltranzitív az  $R_n(a, r)$  gráf?*
- (ii) *Ha  $R_n(a, r)$  éltranzitív, mi az automorfizmus-csoportjának a rendje?*
- (iii) *Milyen  $n, a$  és  $r$  paraméterek esetén lesz  $R_n(a, r)$  beágyazható forgásszimmetrikus térképként?*

Wilson az első kérdés megválaszolásán dolgozva négy olyan rózsablak gráf osztályt talált, amelynek tagjai mind éltranzitívek és azt sejtette, hogy a lista teljes, azaz nincs ezeken kívül más éltranzitív rózsablak gráf [47]. Ezek a gráf-osztályok az alábbiak:

- (a)  $R_n(2, 1)$ ;
- (b)  $R_{2m}(m - 2, m - 1)$ ;
- (c)  $R_{12m}(3m + 2, 3m - 1)$  és  $R_{12m}(3m - 2, 3m + 1)$ ;
- (d)  $R_{2m}(2b, r)$ , ahol  $b^2 = \pm 1 \pmod{m}$ ,  $2 \leq 2b \leq m$ , és  $r \in \{1, m - 1\}$  páratlan.

Ezt a sejtést Kovács, Kutnar és Marušič igazolták [33].

A második és a harmadik kérdést is megválaszoljuk [34]. Munkánk során gráfok *fedéseire* és *beágyazásokra* vonatkozó jól ismert eredményeket használunk fel. Egy  $\tilde{\Gamma}$  gráfot a  $\Gamma$  gráf egy  $p: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  *vetítéssel* való *fedésének* nevezzük, ha  $p$  a  $V(\tilde{\Gamma})$ -ből  $V(\Gamma)$ -ra képező lokálisan bijektív ráképezés, azaz ha  $p|_{N(\tilde{v})} \rightarrow N(v)$  minden  $v \in V(\Gamma)$  és  $\tilde{v} \in p^{-1}(v)$  esetén bijekció. A  $\tilde{\Gamma}$  gráfot a  $\Gamma$  *alap gráf* egy *fedő gráfjának* nevezzük. A  $\Gamma$  gráf egy  $p$  vetítéssel történő  $\tilde{\Gamma}$  fedése *reguláris* (vagy *K-fedés*), ha van egy olyan  $K$  szemireguláris

részcsoportha az  $\text{Aut}(\tilde{\Gamma})$  automorfizmus-csoportnak, amire  $\Gamma$  izomorf  $\tilde{\Gamma}/K$ -val egy  $h$  izomorfizmus mellett és a  $\tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}/K$  kvóciens leképezés éppen  $p$  és  $h$  kompozíciója. Ha  $\tilde{\Gamma}$  összefüggő, akkor  $K$ -t *fedő transzformáció csoportnak* nevezzük, továbbá ha  $K$  ciklikus, akkor  $\tilde{\Gamma}$ -t a  $\Gamma$  gráf *ciklikus fedésének* nevezzük. A reguláris fedések kombinatorikus leírását Gross és Tucker adták meg a feszültség gráfok fogalmát felhasználva [25]. Legyen  $\Gamma$  egy gráf és  $K$  egy véges csoport. Ha  $x \in A(\Gamma)$  egy ív, az inverzét  $x^{-1}$ -vel jelöljük.  $\Gamma$  egy *feszültség kiosztása* (*voltage assignment*) vagy más néven  *$K$ -feszültség kiosztása* alatt egy olyan  $\zeta: A(\Gamma) \rightarrow K$  leképezést értünk, amire teljesül, hogy  $\zeta(x^{-1}) = \zeta(x)^{-1}$  bármely  $x \in A(\Gamma)$  ív esetén. A  $\zeta$  értékeit *feszültségeknek*,  $K$ -t pedig *feszültség-csoportnak* nevezzük. A  $\zeta: A(\Gamma) \rightarrow K$  feszültség kiosztáshoz tartozó ún. *feszültség gráf*  $\Gamma \times_{\zeta} K$  az a gráf, aminek csúcshalmaza  $V(\Gamma) \times K$ , élei pedig  $(u, g)(v, \zeta(x)g)$  alakúak, ahol  $x = (u, v) \in A(\Gamma)$ . Nyilván  $\Gamma \times_{\zeta} K$  a  $\Gamma$  gráf egy fedése az első koordinátára való vetítés mellett. Tekintve a  $K$  csoport azon természetes hatását  $V(\Gamma \times_{\zeta} K)$ -n, amelyikre  $(u, g)^{g'} = (u, gg')$ ,  $(u, g) \in V(\Gamma \times_{\zeta} K)$ ,  $g' \in K$  egy szemireguláris automorfizmus csoportját kapjuk a  $\Gamma \times_{\zeta} K$  gráfnak, ami azt mutatja, hogy a  $\Gamma \times_{\zeta} K$  tulajdonképpen egy  $K$ -fedés. Legyen  $T$  a  $\Gamma$  gráf egy feszítőfája, a  $\zeta$  feszültség kiosztást  *$T$ -redukálnak* nevezzük, ha a fa íveihez tartozó feszültségek mind a csoport egységelemével egyenlők. Bizonyítható, hogy  $\Gamma$  gráf minden  $\tilde{\Gamma}$  reguláris fedése, tetszőlegesen rögzített  $T$  feszítőfa esetén előáll valamely  $T$ -redukált  $\zeta$  feszültség kiosztásból származtatva [25].

Legyen  $\Gamma$  gráf egy  $K$ -fedése  $\tilde{\Gamma}$  a  $p$  projekcióval. Ha  $\alpha \in \text{Aut}(\Gamma)$  és  $\tilde{\alpha} \in \text{Aut}(\tilde{\Gamma})$  teljesítik, hogy  $\tilde{\alpha}p = p\alpha$ , akkor az  $\tilde{\alpha}$ -t az  $\alpha$  egy *felemelésének*, az  $\alpha$ -t pedig  $\tilde{\alpha}$  egy *vetületének* nevezzük. Ha a  $\tilde{X}$  fedő gráf összefüggő, akkor a  $K$  fedő transzformáció csoport az  $\text{Aut}(\Gamma)$  triviális részcsoporthjának felemelése. Jegyezzük meg, hogy a  $G \leq \text{Aut}(\tilde{\Gamma})$  részcsoporth pontosan akkor vetíthető le, ha a  $V(\Gamma)$  halmaz  $K$  pályáira történő partíciója  $G$ -invariáns.

Az a kérdés, hogy a  $\Gamma$  gráf egy  $\alpha$  automorfizmusa felemelődik vagy sem kifejezhető a feszültségek segítségével. Figyeljük meg, hogy az íveken definiált feszültség kiosztás természetes módon kiterjeszthető a séták egy feszültség kiosztásává. Definiálunk egy  $\bar{\alpha}$  függvényt, ami leképezi egy rögzített  $v \in V(\Gamma)$  csúcsra alapuló fundamentális körök feszültségeinek halmazát a  $K$  csoportra a következőképpen:  $\bar{\alpha}(\zeta(C)) = \zeta(C^{\alpha})$ , ahol  $C$  végigfut a  $v$  csúcsra alapuló fundamentális körök halmazán,  $\zeta(C)$  és  $\zeta(C^{\alpha})$  pedig rendre a  $C$  illetve  $C^{\alpha}$  feszültségei. Az alábbi két állítás hasznosnak bizonyul a munkánk során:

**3.3. Állítás.** [35] *Legyen  $\Gamma \times_{\zeta} K$  egy  $K$ -fedés. Ekkor a  $\Gamma$  gráf egy  $\alpha$  automorfizmusa pontosan akkor emelődik fel ha  $\bar{\alpha}$  kiterjeszthető  $K$  egy automorfizmusává.*

**3.4. Állítás.** [36] Legyen  $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma \times_{\zeta} K$  és  $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma \times_{\zeta'} K$  a  $\Gamma$  gráf két összefüggő  $K$ -fedése, ahol  $\zeta$  és  $\zeta'$  két  $T$ -redukált feszültség kiosztás. Ekkor  $\tilde{\Gamma}_1$  és  $\tilde{\Gamma}_2$  pontosan akkor izomorfak, ha vannak olyan  $\gamma \in \text{Aut}(K)$  és  $g \in \text{Aut}(\Gamma)$  automorfizmusok, amikre  $\gamma(\zeta(C)) = \zeta'(C^g)$  teljesül minden, a  $T$  feszítőfához tartozó  $C$  fundamentális kör esetén.

A következő állítás a gráf automorfizmus-csoportjára vonatkozó feltételek segítségével ad kritériumot arra, hogy egy gráf mikor ágyazható be irányítható, zárt felületre forgásszimmetrikus térképként.

**3.5. Állítás.** [21] Egy összefüggő  $\Gamma$  gráf, aminek minden foka legalább 3 pontosan akkor ágyazható be egy irányítható felületre forgásszimmetrikus térképként, ha van olyan  $K \leq \text{Aut}(\Gamma)$ , amire teljesülnek az alábbiak:

1.  $K$  tranzitív a  $\Gamma$  gráf íveinek halmazán.
2. A  $\Gamma$  egy  $v$  csúcsához tartozó  $K_v$  stabilizátor ciklikus.

A fő eredményünk Wilson harmadik kérdésére ad választ:

**3.6. Tétel.** [34] Legyen  $\Gamma = R_n(a, r)$  egy rózsablak gráf és  $\mathcal{M}$  a hozzá tartozó forgásszimmetrikus térkép,  $1 \leq a, r \leq n/2$ . Az alábbiak valamelyike teljesül:

1.  $\mathcal{M}$  reflexibilis és
  - (a)  $\Gamma = R_n(2, 1)$ ,  $\text{gcd}(n, 12) > 2$ ,
  - (b)  $\Gamma = R_{2m}(m-2, m-1)$ ,  $\text{gcd}(m, 60) > 3$ ,
  - (c)  $\Gamma = R_{12m}(3m+2, 3m-1)$  or  $R_{12m}(3m-2, 3m+1)$ ,  $m \equiv 2 \pmod{4}$ .
2.  $\mathcal{M}$  királis és  $\Gamma = R_{2m}(2b, r)$ ,  $m > 2$ ,  $2 \leq 2b \leq m$ ,  $b^2 \equiv -1 \pmod{m}$ , és  $r = 1$ , vagy  $r = m-1$  és  $m$  páros.

## Hivatkozások

- [1] Alperin, J. L. and Bell, R. B.: *Groups and Representations*, volume 162 of Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1995.
- [2] Araujo, G., Noy, M. and Serra, O.: *A geometric construction of large vertex transitive graphs of diameter two*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **57** (2006), 97–102.
- [3] Bannai, E. and Ito, T.: *On finite Moore graphs*, J. Fac. Sci. Tokyo Univ. **20** (1973), 191–208.



- [4] Batten, L. M.: *Determining sets*, Australas. J. Combin. **22** (2000), 167–176.
- [5] Baumert, L. D.: *Cyclic difference sets*, Lecture notes in Mathematics 182, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [6] Biggs, N. L.: *Aspects of symmetry in graphs*, Algebraic methods in graph theory Vol. I, II (Szeged, 1978), pp. 27–35, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **25** North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.
- [7] Biggs, N. L. and White, A. T.: *Permutation groups and combinatorial structures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979.
- [8] Blokhuis, A.: *Characterization of seminuclear sets in a finite projective plane*, J. Geom. **40** (1991), 15–19.
- [9] Blokhuis, A., Malnič, A., Marušič, D., Kiss, Gy., Kovács, I., Ruff, J.: *Semiovals contained in the union of three concurrent lines*, J. of Comb. Design. **15** (2007) 491–501.
- [10] Blokhuis, A. and Szőnyi, T.: *Note on the structure of semiovals in finite projective planes*, Discrete Math. **106/107** (1992), 61–65.
- [11] Bosma, W., Cannon, J., Playoust, C.: *The MAGMA Algebra System I: The User Language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.
- [12] Buekenhout, F.: *Characterizations of semi quadrics. A survey*, Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Roma, 1973), Tomo I, pp. 393–421. Atti dei Convegni Lincei, No. 17, Accad. Naz. Lincei, Rome, 1976.
- [13] Cameron, P. J.: *Four lectures on Projective Geometries*, in: Finite Geom. (ed.: Baker, C.A. and Batten, L.M.) Lecture Notes in pure and applied math. **103**, Marcel Dekker (1985), 27–63.
- [14] Conway, J. H. Talk given at the Second British Combinatorial Conference at Royal Holloway College, 1971.
- [15] Csajbók, B. and Kiss, Gy.: *Notes on semiarcs*, Mediterranean J. Math, submitted
- [16] Davydov, A. A.: *Constructions and families of covering codes and saturating sets of points in projective geometry*, IEEE Transactions on Information Theory **41** (1995), 2071–2080.

- [17] Davydov, A. A. and Drozhzhina-Labinskaya, A. Yu.: *Constructions, families and tables of binary linear covering codes*, IEEE **40** (1994), 1270–1279.
- [18] Davydov, A. A., Faina, G., Marcugini, S. and Pambianco, F.: *Computer search in projective planes for the sizes of complete arcs*, J. Geom. **82** (2005), 50–62.
- [19] Dixon, J. D. and Mortimer, B.: *Permutation groups*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [20] Dover, J. M.: *Semiovals with large collinear subsets*, J. Geom. **69** (2000), 58–67.
- [21] Gardiner, A., Nedela, R., Širáň, J. and Škovič, M.: *Characterisation of graphs which underlie regular maps on closed surfaces*, J. London Math. Soc. (2) **59** (1999), 100–108.
- [22] Gács, A.: *On regular semiovals*, J. Algebraic Combin., **23** (2006), 71–77.
- [23] Godsil, C. D.: *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, New York 1993.
- [24] Gordon, D. M.: *The prime power conjecture is true for  $n < 2,000,000$* , Electronic J. Combin. 1 R6 (1994).
- [25] Gross, J. L., Tucker, T. W.: *Generating all graph coverings by permutation voltage assignment*, Discrete Math. **18** (1977), 273–283.
- [26] Hirschfeld, J. W. P. and Storme, L.: *The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces*, in: Finite Geometries, Development of Mathematics, Kluwer, 2001, 201–246.
- [27] Hoffman, A. J. and Singleton, R. R.: *On Moore graphs with diameter 2 and 3*, IBM J. Res. Develop. **4** (1960), 497–504.
- [28] Hubaut, X.: *Limitation du nombre de points d'un  $(k, n)$ -arc régulier d'un plan projectif fini*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. **8** (1970), 490–493.
- [29] Johnson, P. M.: *Semiquadratic sets and embedded polar spaces*, J. Geom. **64** (1999), 102–127.
- [30] Kiss, Gy.: *Small semiovals in  $PG(2, q)$* , J. Geom., **88** (2008), 110–115.

- [31] Kiss, Gy., Kovács, I., Kutnar, K., Ruff, J., Šparl, P.: *A note on a geometric construction of large Cayley graphs of given degree and diameter*, Studia Univ. „Babes-Bolyai”, Mathematica LIV **3** (2009), 77-84.
- [32] Kiss, Gy. and Ruff, J.: *Notes on small semiovals*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **47** (2004), 97–105.
- [33] Kovács, I., Kutnar, K. and Marušič, D.: *Classification of edge-transitive rose window graphs*, to appear in J. Graph Theory, 2009, 1-16, doi: 10.1002/jgt.20475.
- [34] Kovács, I., Kutnar, K. and Ruff, J.: *Rose window graphs underlying rotary maps*, Discrete Math. **12** 310 (2010), 1802-1811.
- [35] Malnič, A.: *Group actions, coverings and lifts of automorphisms*, Discrete Math. **182** (1998), 203-218.
- [36] Malnič, A., Marušič, D. and Potočnik, P.: *Elementary abelian covers of graphs*, J. Algebraic Combin. **20** (2004), 71-97.
- [37] Mann, H.B.: *Addition Theorems*, John Wiley, 1965.
- [38] Miklavič, S., Potočnik, P. and Wilson, S.: *Consistent cycles in graphs and digraphs*, Graphs and Combin. **23** (2007), 205–216.
- [39] Miller, M. and Širaň, J.: *Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem*, Electron. J. Combin., DS14 (2005) 61 pp.
- [40] Nagell, T.: *The diophantine equation  $x^2 + 7 = 2^n$* , Ark. Mat. **4** (1961), 185–187.
- [41] Potočnik, P. and Wilson, S.: *A Census of edge-transitive tetravalent graphs*,  
<http://jan.ucc.nau.edu/~swilson/C4Site/index.html>
- [42] Rédei, L.: *Die neue Theorie der endlichen abelschen Gruppen und Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hajós*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **16** (1965), 329–373.
- [43] Suetake, C.: *Two families of blocking semiovals*, European J. Combin. **21** (2000), 973–980.
- [44] Szabó, S.: *Topics in Factorizations of Abelian Groups*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2004.

- [45] Szőnyi, T.: *Combinatorial problems for abelian groups arising from geometry*, Period. Polytech. Transportation Engrg. **19** (1991), no. 1-2, 91–100.
- [46] Thas, J. A.: *On semiovals and semioids*, Geom. Dedicata **3** (1974), 229–231.
- [47] Wilson, S.: *Rose Window Graphs*, Ars Math. Contemp. **1** (2008), 7–19.  
<http://amc.imfm.si/index.php/amc/issue/view/5>
- [48] Wilson, S.: *Operators over regular maps*, Pacific J. Math. **81** (1979), 559–568.
- [49] *The (Degree, Diameter) Problem for Graphs*, A World Combinatorics Exchange resource at  
[http://www-mat.upc.es/grup\\\_de\\\_grafs/oldpage.html](http://www-mat.upc.es/grup\_de\_grafs/oldpage.html).