Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Multikromatikus számokra vonatkozó topologikus alsókorlát tételek

Ph.D. értekezés tézisei

Osztényi József

Témavezető:
Dr. Kincses János
Bolyai Intézet

Szeged
2010.

Bevezetés

Kutatásaim a kombimatorikus topológia témakörén belül a gráfok multikromatikus számaira vonatkozó topologikus alsókorlát tételek vizsgálata köré összpontosulnak. Ezen terület kezdőpontja Lovász Lászlónak a Kneser sejtésre adott 1978-as bizonyítása [22], mely cikkben egy tetszőleges G gráf kromatikus számára a G gráf szomszédsági komplexusának topologikus összefüggőségi számával ad alsó korlátot. A Lovász által kidolgozott topologikus módszerrel további alsókorlát tételek születtek: J.W. Walker elegáns funktoriális bizonyítást tartalmazó [35] cikkében a Lovász komplexus $\mathbb{Z}_2$-indexével korlátozza alulról a kromatikus számot. J. Matoušek és G.M. Ziegler a Lovász komplexussal homotóp ekvivalens Box komplexus $\mathbb{Z}_2$-indexét használták [24]-ben. Napjainkban az ugyancsak Lovász László által definiált gráfhomomorfizmus komplexussal dolgoznak E. Babson és D.N. Kozlov [2], [3].

A gráfok s-szeres színezését ugyancsak az 1970-es években vezették be számos gyakorlati probléma által vezérelve [18], [27]. Ezzel kapcsolatos első eredményeket Saul Stahl 1978-as [32] cikke tartalmazza. Stahl a Kneser sejtés által motiválva, valamint a Kneser gráfoknak a s-szeres színezésekben betöltött központi szerepete kapcsán megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, a Kneser gráfok multikromatikus számaira vonatkozó sejtését. Ezt ma Stahl sejtésnek nevezzük. A Kneser gráfok multikromatikus számainak viselkedésének számos tulajdonságát fogalmazta meg, több esetben kiszámolta ezeket [32] és [33] cikkeiben.

Eddigi kutatásaim során a Stahl sejtés által motiválva a fent említett, gráfok kromatikus számára vonatkozó topologikus alsókorlát tételek multikromatikus számokra való átvitelét vizsgáltuk. Valamint ezen tételeket alkalmazva alsó korlátot adtunk a Kneser gráfok kromatikus számaira.

A tételek számozása a disszertációban és a tézisfüzetben a könnyebb hivatkozhatóság végett megegyezik.

1. Kombinatorikus topológiai módszerek

A disszertációban alkalmazott módszerek a kombinatorikus topológia témaköréhez tartoznak. A dolgozatban számos komplexus homotópia típusát, illetve topologikus invariánsát határoztuk meg. Adott $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusok homotópia típusának meghatározására a szimpliciális átfejthetőségére vonatkozó parciális párosítási technikát [20], illetve a R. Forman [14] által kidolgozott diszkrét Morse elméletet használtuk. Ugyancsak többször alkalmaztuk adott $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusok topologikus összefüggőségi számának kiszámolására az Ideg tétel [6].

2. Topologikus alsókorlát tételek a kromatikus számra

Lovász László a Kneser sejtés [19] bizonyításához egy általános, topologikus gráfszínezhetőségi tételt igazolt [22]-ben. A Lovász tételt számos gráfszínezhetőségre vonatkozó topologikus akadály tétel követte, melyek mindegyikében az alábbi eljárást alkalmazták.

$$\begin{array}{ccc} G \text{ gráf} & \longrightarrow & \mathcal{K}(G) \text{ gráfkomplexus} \\ & & \downarrow \\ \text{alsó korlát } \chi(G)\text{-re} & \longleftarrow & \mathcal{K}(G) \text{ topologikus tulajdonsága} \end{array}$$

Lovász egy tetszőleges G gráfhoz definiálta az $\mathcal{NK}(G)$ *szomszédsági komplexust.* Az $\mathcal{NK}(G)$ csúcshalmaza legyen G csúcshalmaza, és a csúcsok egy A részhalmaza szimplex, ha van közös szomszédjuk G-ben. Ezen komplexust vizsgálva az alábbi topologikus gráfszínezhetőségi tételt bizonyította Lovász [22]-ben.

15. Tétel. (Lovász [22]) *Ha a G gráf szomszédsági komplexusa $(t-1)$-összefüggő, akkor a G gráf nem színezhető $t+1$ színnel.*

Az, úgyszintén Lovász által [22]-ben definiált, $cn_G : 2^{V(G)} \to 2^{V(G)}$ szomszédsági leképezés a csúcsok egy A halmázhoz a közös szomszédjaik halmazát rendeli, azaz a

$$cn_G(A) := \{v \in V(G) : (v,a) \in E(G) \text{ minden } a \in A\text{-ra}\}.$$

halmazt. Walker az $\mathcal{NK}(G)$ szomszédsági komplexus baricentrikus felosztásának $cn_G \circ cn_G$ leképezés fixpontjai által indukált részkomplexusaként definiálta a G gráf $\mathcal{LK}(G)$ *Lovász komplexusát.* Az $\mathcal{LK}(G)$ és $\mathcal{NK}(G)$ komplexusok homotóp ekvivalensek, ám míg $\mathcal{NK}(G)$ általában nem $\mathbb{Z}_2$-komplexus, addig $\mathcal{LK}(G)$ egy szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexus. Ugyanis $\mathcal{LK}(G)$-n cn_G indukál egy szimplicális $\mathbb{Z}_2$-hatást (idempotens, fixpontmentes szimpliciális leképezés). Walker a következő alsó korlátot adta a G kromatikus számára az $\mathcal{LK}(G)$ komplexus topologikus $\mathbb{Z}_2$-invariánsával, az $\mathrm{ind}(\mathcal{LK}(G))$ $\mathbb{Z}_2$-indexével.

21. Tétel. (Walker [35]) *Tetszőleges G gráfra*

$$\chi(G) \geq ind(\mathcal{LK}(G)) + 2.$$

A $\mathcal{H}om(H, G)$ gráfhomomorfizmus komplexus konstrukciója ugyancsak Lovász Lászlóhoz fűződik. Tetszőleges G és H gráfokra vegyük az összes olyan $\eta : V(H) \to 2^{V(G)} \setminus \{\emptyset\}$ leképezés posetjét, melyre $\eta(u)$ minden csúcsa $\eta(v)$ minden csúcsával össze van kötve, minden $uv \in E(H)$ élre. A $\mathcal{H}om(H, G)$ *gráfhomomorfizmus komplexust* ezen poset rendezési komplexusaként definiáljuk. A $\mathcal{H}om(K_n, G)$ gráfhomomorfizmus komplexus ugyancsak szimpliciális $\mathbb{Z}_2$-komplexussá tehető.

Babson és Kozlov [2]-ben a G gráf kromatikus számára vonatkozó topologikus alsókorlát tételt fogalmazott meg a $\mathcal{H}om(K_n, G)$ komplexus topologikus invariánsával, a $\varpi(\mathcal{H}om(K_n, G))$ Stiefel-Whitney osztállyal. Ennek a $\mathbb{Z}_2$-indexxel megfogalmazott változata:

23. Tétel. (Babson és Kozlov [2]) *Tetszőleges $n \geq 2$ egész és G gráf esetén*

$$\chi(G) \geq ind(\mathcal{H}om(K_n, G)) + n.$$

3. Gráfok s-szeres színezése

Tetszőleges s pozitív egész esetén, egy G gráf *s-szeres színezése* során a gráf minden csúcsához s darab színt rendelük úgy, hogy szomszédos csúcsokhoz diszjunkt szín s-es tartozik. Világos, hogy a G gráf s-szeres színezése a hagyományos színezés általánosítása, amikor minden csúcshoz egy színt rendelünk. Tegyük fel, hogy a G gráf s-szeres színezése során összesen t színt használtunk fel. Ekkor a G gráf s-szeres színezésére a Stahl [32] cikkébben található, különböző nézőpontokból tekinthetünk. Először a gráfhomomorfizmus fogalmát használva:

Egy G gráf s-szeres színezése t színnel egy $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus.

Az s-szeres színezés egy, a hagyományos színezésen keresztül való értelmezését is adhatjuk a $G[K_s]$ gráf segítségével, a G gráf K_s teljes gráffal vett lexikografikus szorzatát használva.

Egy G gráf s-szeres színezése t színnel pontosan a $G[K_s]$ gráf hagyományos színezése t színnel.

Legyen $\chi_s(G)$ az a legkisebb t szám, melyre létezik G-nek s-szeres színezése t színnel. A $\chi_s(G)$ számot a G gráf s-edik multikromatikus számának nevezzük, $s = 1, 2, \ldots$. Megjegyezzük, hogy ez a definíció a gráf hagyományos kromatikus számának egy általánosítása, ugyanis a G gráf hagyományos kromatikus száma éppen a $\chi_1(G)$. A $G[K_s]$ lexikografikus szorzat kromatikus száma megegyezik a G gráf s-dik multikromatikus számával.

A $KG_{t,s}$ Kneser gráfok előbb látott központi szerepe kapcsán Stahl vizsgálta a multikromatikus számaikat, melyeket több esetben kiszámolt. Ezek alapján megfogalmazta a Kneser sejtés általánosítását, amely megadná az összes multikromatikus számot.

30. Sejtés. (Stahl [32]) *Tetszőleges n és $m \geq 2n$ esetén legyen $s = qn - r$, ahol $0 < q$ és $0 \leq r < n$ egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) = qm - 2r.$$

Az $s = 1$ eset éppen a Kneser sejtés, amit Lovász igazolt [22]-ben. Stahl következő 1998-as [33] cikkében az Erdős-Chao Ko-Rado és a Hilton-Milner tételeket használva alsókorlátot adott $KG_{m,n}$-beli s-szeresen fedő független csúcshalmazok számára, s ezzel a $KG_{m,2}$ és $KG_{m,3}$ Kneser gráfokra igazolta a sejtés. Továbbá az alábbi alsó korlátot adta.

31. Tétel. (Stahl [33]) *Tetszőleges n és $m \geq 2n$ esetén legyen $s = qn - r$, ahol $0 < q$ és $0 \leq r < n$ egészek, ekkor*

$$\chi_s(KG_{m,n}) \geq qm - 2r - (n^2 - 3n + 4).$$

A sejtést igazolná a $\chi_{qn}(KG_{m,n})$ és $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$ multikromatikus számok közti $m - 2n + 2$-es ugrás bizonyítása, ugyanis Stahl megmutatta, hogy $\chi_{s+1} \geq \chi_s + 2$ minden s pozitív egészre. Az előbbi tételben szereplő alsó korlát $s = qn + 1$ esetén,

$$\chi_{qn+1}(KG_{m,n}) \geq \chi_{qn}(KG_{m,n}) + m - 2n - (n^2 - 3n + 4),$$

éppen azt mutatja, hogy a $\chi_{qn}(KG_{m,n})$ és $\chi_{qn+1}(KG_{m,n})$ multikromatikus számok között rögzıtett n esetén akármilyen nagy ugrás lehet.

4. Topologikus alsókorlát tételek a multikromatikus számokra

A Stahl sejtés által motiválva a korábban ismertetett topologikus alsókorlát tételek multikromatikus számokra vonatkozó általánosításai lehetőségeit vizsgáltam.

A Walker-féle tétel általánosítása

A hagyományos kromatikus számra vonatkozó Walker-féle topologikus alsókorlát tételnek a multikromatikus számra vonatkozó általánosítását egyszerűen levezethetjük az $\mathcal{L}(KG_{t,s})$ Lovász komplexus ismert homotópia típusából. A G gráf t színnel való s-szeres színezése, egy $\gamma : G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus indukál egy $c : |\mathcal{L}(G)| \to |\mathcal{L}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezést, így

$$\mathrm{ind}(\mathcal{L}(G)) \leq \mathrm{ind}(\mathcal{L}(KG_{t,s})).$$

A $KG_{t,s}$ Kneser gráf Lovász komplexusáról ismert, hogy homotóp ekvivalens egy $(t-2s)$-dimenziós gömbcsokorral, így $\mathrm{ind}(\mathcal{L}(KG_{t,s})) = t - 2s$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathrm{ind}(\mathcal{L}(G)) \leq \mathrm{ind}(\mathcal{L}(KG_{t,s})) = t - 2s.$$

Ezzel a Walker-féle topologikus alsókorlát tétel általánosítását kaptuk a $\chi_s(G)$ multikromatikus számokra:

33. Tétel. (Osztényi) *Tetszőleges G gráf esetén és $s \geq 1$-re*

$$\chi_s(G) \geq \mathit{ind}(\mathcal{L}(G)) + 2s.$$

A Babson-Kozlov-féle tétel általánosítása

A Babson-Kozlov-féle topologikus alsókorlát tétel általánosításához ismét tegyük fel, hogy létezik t színnel való s-szeres színezése a G gráfnak, azaz $G \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus, ekkor létezik $\mathcal{H}om(K_n, G) \to \mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés. A $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotópia típusát [29]-ben meghatároztam meg.

34. Tétel. (Osztényi [29]) *A $\mathcal{H}om(K_n, KG_{t,s})$ komplexus homotóp ekvivalens $(t-ns)$-dimenziós gömbcsokorral.*

Így

$$\mathrm{ind}(\mathcal{H}om(K_l, G)) \leq \mathrm{ind}(\mathcal{H}om(K_l, KG_{t,s})) = t - sl.$$

Ezzel a következő topologikus alsókorlát tételt kaptuk a multikromatikus számokra.

36. Tétel. (Osztényi [29]) *Tetszőleges G gráfra, s és $l \geq 2$ pozitív egész számokra*

$$\chi_s(G) \geq ind(\mathcal{H}om(K_l, G)) + sl.$$

A Lovász-féle alsókorlát tétel a lexikografikus szorzatra

A G gráf s-szeres színezése ekvivalens a $G[K_s]$ lexikografikus szorzat egyszeres színezésével, így a Lovász-féle alsókorlát tételt alkalmazva a következő

$$\chi_s(G) \geq conn(\mathcal{NK}(G[K_s])) + 3$$

alsó korlátot kapjuk G multikromatikus számaira.

A $G[K_s]$ lexikografikus szorzat szomszédsági komplexusának topologikus összefüggősége és a G gráf úgynevezett kiegészített szomszédsági komplexusának topologikus összefüggősége közötti kapcsolatot [12]-ben mutattuk meg. Az $\mathcal{NK}(G[K_s])$ szomszédsági komplexus egy jó felbontására alkalmazva az Ideg tételt az alábbi összefüggést kaptuk.

41. Tétel.(Osztényi [12]) *Tetszőleges $s > l \geq 2$ egészek és G gráf esetén az $\mathcal{NK}(G[K_s])$ komplexus akkor és csakis akkor l-összefüggő, ha az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus l-összefüggő.*

Ez azt is jelenti, hogy $conn(\mathcal{EN}(G))$ végessége esetén $conn(\mathcal{NK}(G[K_s])) = conn(\mathcal{EN}(G))$ minden $s \geq conn(\mathcal{EN}(G)) + 2$-re. Így a Lovász-féle alsó korlát ebben az esetben

$$\chi_s(G) \geq conn(\mathcal{EN}(G)) + 3,$$

minden $s \geq conn(\mathcal{EN}(G)) + 2$-re. A Stahl megmutatta, hogy $\chi_s(G)$ szigorúan monoton nő s-ben, így $conn(\mathcal{EN}(G))$ végessége esetén Lovász-féle alsó korlát és a multikromatikus szám közti különbség akármilyen nagy lehet.

Babson-Kozlov-féle alsó korlát tétel a lexikografikus szorzatra

A Babson-Kozlov-féle alsókorlát tételt alkalmazva a $G[K_s]$ lexikografikus szorzatra a

$$\chi_s(G) \geq \mathrm{ind}(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2$$

alsó korlátot adja. A $\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])$ gráf homomorfizmus komplexus $\mathbb{Z}_2$-indexe és a G gráfban található legnagyobb teljes részgráf mérete közti kapcsolatot [12]-ben mutattuk meg.

42. Tétel. (Csorba [12]) *Tetszőleges G gráf és $s \geq |V(G)|$ egész esetén*

$$ind(\mathcal{H}om(K_2, G[K_s])) + 2 = s \cdot \omega(G).$$

Ez a következő triviális alsó korlátot adja a multikromatikus számokra.

43. Tétel. (Csorba [12]) *Tetszőleges G gráf és $s \geq |V(G)|$ egész esetén*

$$\chi_s(G) \geq s \cdot \omega(G).$$

5. A Stahl sejtés vizsgálata

Topologikus alsó korlátok

A Walker-féle, illetve Babson-Kozlov-féle tételek általánosításai csak bizonyos, már eddig is ismert, esetekben oldják meg a sejtést, a többi esetben nem adnak éles alsó korlátot a $KG_{m,n}$ Kneser gráf multikromatikus számaira. Az $\mathcal{EN}(KG_{m,n})$ komplexus összefüggőségéről megmutattuk [12]-ben, hogy véges. Ebből az derült ki, hogy a Lovász-féle alsó korlátot alkalmazva $KG_{m,n}[K_s]$ gráfra az nem oldja meg a Stahl sejtést. Az 43. tételt alkalmazva a $KG_{m,n}$ Kneser gráfra csak a Babson-Kozlov-féle tétel általánosításával (36. tétel) adott alsó korláttal megegyező vagy annál gyengébb alsó korlátot kapunk.

Poset alsó korlát

A $KG_{m,n}$ Kneser gráf s-szeres színezése t színnel megegyezik egy $KG_{m,n} \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmussal. A Stahl sejtés éppen azt mondja meg, hogy mely indexekre léteznek ilyen gráfhomomorfizmusok. Egy $\gamma : KG_{m,n} \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmus létezése esetén valamennyi $\mathcal{K}(\cdot)$ $\mathbb{Z}_2$-gráfkomplexusra létezik egy $c : |\mathcal{K}(KG_{m,n})| \to |\mathcal{K}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés. Egy ilyen c leképezés létezésének akadálya a Borsuk-Ulam tétel szerint, ha $|\mathcal{K}(KG_{m,n})|$-ben nagyobb dimenziós $\mathbb{Z}_2$-gömbfelület van, mint $|\mathcal{K}(KG_{t,s})|$-ben. Az általunk vizsgált topologikus alsó korlátok életlensége abból adódik, hogy a vizsgált esetek nagy részében ez éppen fordítva van. Azaz ha

$m-2n < t-2s$, akkor $|\mathcal{K}(KG_{t,s})|$-ben nagyobb dimenziós $\mathbb{Z}_2$-gömbfelületek vannak, mint $|\mathcal{K}(KG_{m,n})|$-ben. Tehát $|\mathcal{LK}(KG_{m,n})| \to |\mathcal{LK}(KG_{t,s})|$ $\mathbb{Z}_2$-leképezés létezhet, ha $m-2n \leq t-2s$.

A $KG_{m,n}$ Kneser gráf s-edik multikromatikus számára vonatkozó újabb alsó korlátot kapunk, ha a $KG_{m,n} \to KG_{t,s}$ gráfhomomorfizmusok által indukált, a Lovász posetek közti, $LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezések létezését vizsgáljuk. Az $(LP(KG_{m,n}), cn_{KG_{m,n}})$ ortoposetet J. Walker definiálta az általa konstruált, gráfok és $\mathbb{Z}_2$-terek kategóriái közti funktor közteslépéseként [35]-ben. Az $LP(KG_{m,n}) \to LP(KG_{t,s})$ ortoleképezések érzékenyek a gömbfelületek "szimpliciális méretére" is a dimenzó mellett. Az $LP(KG_{m,n})$ ortoposetbeli szimpliciális egy dimenziós ortokörök méretét vizsgálva a következő alsó korlátot kaptuk [28]-ban.

50. Tétel. (Osztényi [28]) *Tetszőleges* $0 < m, n, q$ *és* $0 \leq r < n$ *egészek esetén legyen* l *egész olyan, hogy* $1 \leq l \leq m-2n$, $0 \leq r < ln/(m-2n)$. *Ekkor*

$$\chi_{qn-r}(KG_{m,n}) > qm - 2r - l.$$

Ez megadja a $\chi_s(KG_{m,n})$ multikromatikus számokat a $qn - \lfloor \frac{n}{m-2n} \rfloor \leq s \leq qn$ esetekben, tetszőleges m, n és q pozitív egészekre. Ami $m < 3n$ esetén újabb, eddig nem bizonyított, részesetekben igazolja a sejtést.

Amint azt a fenti tétel is mutatja az $LP(KG_{m,n})$ ortoposetbeli a gömbfelületek "szimpliciális méretét" vizsgálva újabb $\chi_s(KG_{m,n})$ multikromatikus számokat határozhatunk meg. Ám az egy dimenziós esethez képeset a magasabb dimenziós esetekben további nehézségek adódnak, melyek leküzdése a további kutatások tárgya lehet.

Hivatkozások

[2] E. Babson and D.N. Kozlov, Complex of graph homomorphisms, *Israel J. Math.*, **152**, (2006), 285-312.

[3] E. Babson and D.N. Kozlov, Proof of the Lovász conjecture, *Ann. of Math. (2)*, **165**, (2007), 965-1007.

[6] A. Björner, Topologycal methods, in Handbook of Combinatorics (R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1995.

[12] P. Csorba and J. Osztényi, On the topological lower bound for the multichromatic number, *Discrete Math.*, **310**, (2010), 1334-1339.

[14] R. Forman, Morse theory for cell complexes, *Advances in Mathematics*, **134**, (1998), 90-145.

[18] E.N. Gilbert, Unpublished technical memorandum, Bell Telephone Labs, Murray Hill, N.J., 1972.

[19] M. Kneser, Aufgabe 300, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **58**, (1955).

[20] D. N. Kozlov, Combinatorial algebraic topology, Algorithms and Computation in Mathematics, 21. Springer, Berlin 2008.

[22] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *J. Combin. Theory Ser. A*, **25**, (1978), 319-324.

[24] J. Matoušek and G. M. Ziegler, Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy, *Jahresbericht der DMV*, **106**, (2004), 71-90.

[27] R.J. Opsut and F.S. Roberts, On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems, in Theory of Applications of Graphs. (G. Chartrand, et al. eds.), Wiley, New York 1981, 479-492.

[28] J. Osztényi, A lower bound on the multichromatic number of the Kneser graphs, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **74**, (2008), 289-296.

[29] J. Osztényi, The homotopy type of complexes of homomorphisms from a complete graph to a Kneser graph, *Acta Sci. Math. (Szeged)* (2010), elfogadva.

[32] S. Stahl, n-tuple colorings and associated graphs, *J. Combin. Theory Ser. B*, **20**, (1976), 185-203.

[33] S. Stahl, The multichromatic numbers of some Kneser graphs, *Discrete Math.*, **185**, (1998), 287-291.

[35] J.W. Walker, From graphs to ortholattices and equivariant maps. *J. Combin. Theory Ser. B*, **35**, (1983), 171-192.