Extremális problémák síkbeli ponthalmazokon

Doktori értekezés tézisei

Mészáros Viola

Témavezetők:

Hajnal Péter, Szegedi Tudományegyetem
Pavel Valtr, Univerzita Karlova v Praze

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Szeged, 2011

Bevezető

A kombinatorikus geometriában egyik alapprobléma annak meghatározása, hogy egy gráf lerajzolható-e adott síkbeli ponthalmazra metszésmentesen, egyenes élekkel. A probléma erősebb változata, amikor a gráf és a ponthalmaz pontjai egyaránt színezettek, és minden pontot azonos színűhöz kell rendelni (a [8] cikk feldolgozza ezt a témát). Érdekes, nem triviális kérdések vetődnek fel már akkor is, ha egy két színnel színezett utat szeretnénk beágyazni egy két színnel színezett ponthalmazba. Többen foglalkoztak az alternáló, vagyis a monokromatikus él nélküli, utak kérdésével.

Vegyünk egy tetszőleges $2n$ elemű, kiegyensúlyozott színezésű (n pont piros és n pont kék) halmazt a síkon. A cél meghatározni vagy megbecsülni a leghosszabb metszésmentes, alternáló úton lévő pontok számát, ha az élek egyenes szakaszok.

Általános helyzetben fekvő ponthalmazon sok a nyitott kérdés. Ha a színosztályokat elválasztja egy egyenes, akkor létezik metszésmentes, alternáló Hamilton út a ponthalmazon [1]. Ez hasonlóan teljesül, ha az egyik színosztály megegyezik a konvex burkon lévő pontok halmazával [1]. Viszont, ha a színosztályok nincsenek elválasztva egy egyenessel, akkor $n \geq 8$-ra található olyan ponthalmaz (még konvex helyzetű is), amelyben nincs metszésmentes, alternáló Hamilton út. A felező egyenesek léte garantálja az [1] eredmény által, hogy legalább n pont van a leghosszabb metszésmentes, alternáló úton minden $2n$ elemű, kiegyensúlyozott színezésű ponthalmaz esetén.

Erdős [6] a fenti kérdést konvex helyzetre fogalmazta meg.

$$\ell(\mathcal{P}) = \max_{U \text{ metszésmentes, alternáló út}} \ell(U),$$

ahol $\ell(U)$ az U-ban lévő pontok száma.

$$\ell(n) = \min_{\mathcal{P} \text{ kiegyensúlyozott színezésű}} \ell(\mathcal{P}),$$

ahol $\mathcal{P}$ tetszőleges síkbeli, színezett, $2n$ elemű, konvex helyzetű ponthalmaz.

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy pontjaink egy körön helyezkednek el. Erdős azt sejtette, hogy a következő konfiguráció aszimptotikusan extremális. Legyen n osztható néggyel! Osszuk fel a kört négy intervallumra, amelyeken sorban $\frac{n}{2}$ piros, $\frac{n}{4}$ kék, $\frac{n}{2}$ piros és $\frac{3n}{4}$ kék pont van. Ebben a konfigurációban pontosan $\frac{3n}{2} + 2$ pontot tartalmaz a leghosszabb metszésmentes, alternáló út.

Kynčl, Pach és Tóth [10] megcáfolták a fenti sejést egy egyedülálló konstrukcióval 2008.-ban, és belátták a $\frac{4}{3}n + O(\sqrt{n})$ felső és az $n + \Omega\left(\sqrt{n/\log n}\right)$ alsó korlátot. A felső korlát a sejtésük szerint aszimptotikusan éles.

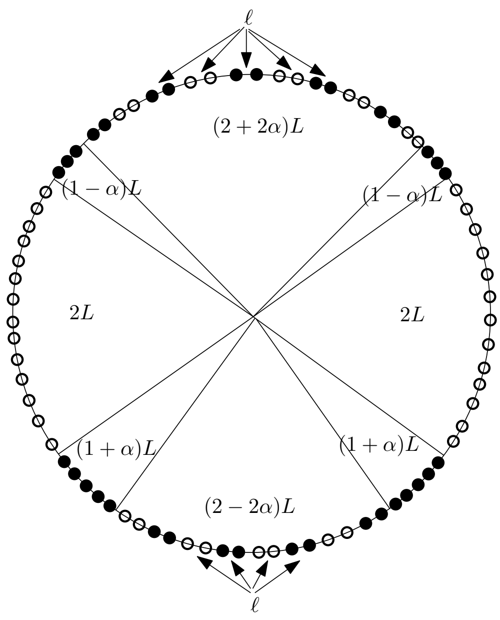

Figure 1: A $\mathcal{P}_{\alpha,\ell}$ színezés, ahol ℓ jelöli a rövid monokromatikus ívek közös hosszát a két középső íven (itt $\ell = 2$)

Eredmények

A doktori értekezésemben bemutatok egy konfiguráció osztályt, amely szintén bizonyítja a $\frac{4}{3}n + O(\sqrt{n})$ felső korlátot [7] konvex helyzetű ponthalmazon a metszésmentes, alternáló utak hosszára. Ez az eredmény közös témavezetőmmel, Hajnal Péterrel.

A fenn említett konfiguráció osztály a következőképpen írható le. Legyen $\mathcal{P}_{\alpha,\ell}$ egy színezése a $2n = 12L$ kiegyensúlyozott színezésű ponthalmaznak, ahol $\alpha \in [-1, 1]$ és ℓ bizonyos szomszédos, monokromatikus ívek hosszát jelöli, lásd a Figure 1 képen. Feltesszük, hogy αL egész. A monokromatikus illetve a vegyes színezésű íveken lévő pontok száma a képen a belső szögekben van feltűntetve.

Bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel 1. *[7] Ha $\ell = \Theta(\sqrt{n})$, akkor $\ell(\mathcal{P}_{\alpha,\ell}) = \frac{4n}{3} + O(\sqrt{n})$.*

Ezt az osztályt függetlenül Jan Kynčl [9] is megtalálta számítógépes kereséssel.

Az alsó korlát bizonyításának lényege a [10] cikkben a nem kiegyensúlyozott ívek (lényegesen több pontot tartalmaz az egyik színosztályból) egy okos

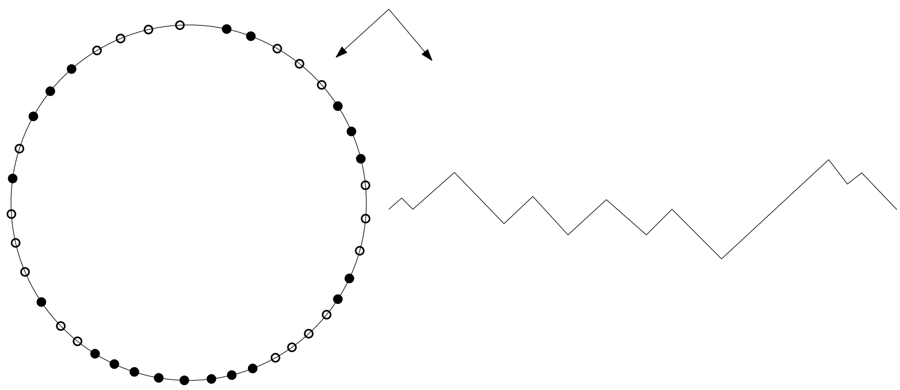

Figure 2: Hogyan kódoljunk egy színezett ponthalmazt Dyck-útként

definiálása, míg a színek közti váltakozás nem gyakori a kör mentén. Mi ugyanezt tettük egy más ötletet alkalmazva, és jobb eredményt kaptunk [7].

Az alapötlete a javításunknak a színezett ponthalmaz egy egyszerű kódolása. Dyck-út segítségével kódoljuk a ponthalmazunkat. Minden piros pontra bevezetünk egy ,,fel" egység szakaszt, és minden kék pontra bevezetünk egy ,,le" egység szakaszt, példa a színezésre és a kódolára a Figure 2 képen. A séta magassága tükrözi, hogyan váltakoznak a színek. Mivel kiegyensúlyozott színezésű ponthalmazt kódolunk, a séta ugyanazon a szinten fejeződik be, ahol elkezdődött. A legalsó szinten a sétát elvágjuk egy tetszőleges ponton. Így egy Dyck-utat nyerünk, amely kódolja a színezett ponthalmazunkat.

Valójában, a kódunk tartalmaz minden kombinatorikus információt a problémára vonatkozóan. A Dyck-út $2n$ lépésből áll. Minden lépés egy szintről indul, és a szomszédoson fejeződik be.

Elemi kombinatorikus, de ötletes indoklással egy kiegyensúlyozatlan ívet lokalizálunk, amely elvezet az alábbi tételhez:

Tétel 2. *[7]* $\ell(n) \geq n + \Omega(\sqrt{n})$.

A megoldó technikák bevezették a *szeparált párosítás* fogalmát, vagyis az olyan párosításét, amelynek élei nem metszik egymást geometrikusan, és az élek halmaza elmetszhető egy egyenessel.

Az irodalomban vizsgált esetekben a leghosszabb metszésmentes, alternáló úton lévő pontok száma n és $2n$ közé esik, amíg a színosztályok közötti alternálások száma $o(n)$. Ha a színosztályok közötti alternálások száma lineáris volna, akkor a leghosszabb metszésmentes, alternáló út "túl" hosszú lenne. Ha ez a szám $o(n)$, akkor a hosszú metszésmentes, alternáló út léte garantál egy nagy szeparált párosítást is. Vegyük észre, hogy ez fordítva mindig igaz, vagyis ha van nagy szeparált párosítás, akkor van hosszú metszésmentes, alternáló út is. Ezért érdemes a szeparált párosításokra koncentrálni.

Több új konstrukciót szerkesztettem, amelyben legfeljebb $\frac{4}{3}n + O(\sqrt{n})$ pont van tetszőleges szeparált párosításban [12]. Köztük az egyik konstrukció nagyban különbözik minden korábbi konstrukciótól. Egy színezési mintát is megadtam úgy, hogy az optimális színezésben minden szeparált párosítás legfeljebb $\frac{4}{3}n + O(\sqrt{n})$ pontot tartalmaz.

Leírom a két fő konstrukciót, és megadok egy harmadikat az egyikük általánosításával.

A szeparált párosítás *mérete* az általa lefedett pontok száma. Egy (as, bs) blokk egy as pontot tartalmazó piros ívből és egy bs pontot tartalmazó kék ívből tevődik össze. Egy $s(b, a)$ blokk egy b pontot tartalmazó piros ívből és egy a pontot tartalmazó kék ívből tevődik össze, ahol ez az $a + b$ darab színezett pont s-szer ismétlődik.

Az első konstrukció $C_1(s, t)$: Vegyünk t darab $(s, 2s)$ blokkot egymás mellett a körön, melyeket t darab $s(2, 1)$ blokk követ.

A második konstrukció ${C_1}^+(a, b, s, t)$: Vegyünk t darab (as, bs) blokkot egymás mellett a körön, melyeket t darab $s(b, a)$ blokk követ. Megjegyezzük, hogy ${C_1}^+(1, 2, s, t) = C_1(s, t)$.

A harmadik konstrukció egy színezési osztály $\mathcal{C}_2(s, t)$: Vegyünk t darab $(s, 2s)$ blokkot és t darab $(s, s(1, 1))$ blokkot a körön tetszőleges sorrendben.

A következőket bizonyítottam be:

Tétel 3. *[12] $C_1(s, t)$-ben minden szeparált párosítás mérete legfeljebb $\frac{4}{3}n + O(s + t)$.*

Tétel 4. *[12] ${C_1}^+(a, b, s, t)$-ben a maximális szeparált párosítás méretének az egész ponthalmazzal vett aránya:*

$$\max\left\{\frac{2\min\{a, b\}}{a + b}, \frac{\max\{a, b\}}{a + b}\right\} + O\left(\frac{(a + b)(s + t)}{n}\right).$$

Ebből következik, hogy a legnagyobb szeparált párosítás méretének nagyságrendje legalább $\frac{4}{3}n$. Egyenlőség áll fenn, ha $\max\{a, b\} = 2\min\{a, b\}$. Vagyis $C_1(s, t)$ optimális ${C_1}^+(a, b, s, t)$-ben.

Tétel 5. *[12] Legyen C_2 tetszőleges színezés $\mathcal{C}_2(s, t)$-ből. Ekkor minden C_2-beli szeparált párosítás mérete legfeljebb $\frac{4}{3}n + O(s + t)$.*

Tétel 6. *[12] Legyen C_3 az a színezés $\mathcal{C}_2(1000, t)$-ből, ahol a piros többségű és kék többségű blokkok váltakozva követik egymást a körön. Ekkor a legnagyobb szeparált párosítás mérete C_3-ban legalább $1.34n$.*

Ha a és b konstansok $C_1^+(a,b,s,t)$-ben, akkor a következőképpen gondolhatunk a fenti tételekre. Mivel $s \cdot t = O(n)$, megválaszthatjuk s-t és t-t úgy, hogy $s, t = O(\sqrt{n})$, és így $O(s+t)$ nagyságrendje elhanyagolható lesz. Ha a és b nem konstansok, akkor megválaszthatjuk őket úgy, hogy a színosztályok közötti alternálások száma és a maradéktag is $o(n)$ legyen, amely új rövid metszésmentes, alternáló utakat tartalmazó konstrukciókhoz vezet.

A hatodik tétel kivételt képez. Ott s-t nagy konstansnak választjuk, míg t $\epsilon \cdot n$ lesz. Tehát, $O(s+t)$ nagyon kicsi, de nem elhanyagolható. Az oka ennek a rögzítésnek az, hogy C_3-ban a színezés diszkrepanciája konstans (2000). Egyidejűleg az optimális szeparált párosítás mérete nagyon közel van a sejtett értékhez.

Szeparált párosításokra megfogalmazódott az alábbi sejtés.

Sejtés. [7] Minden kiegyensúlyozott színezésű, $2n$ elemű konvex ponthalmazon létezik $\frac{4}{3}n + O(\sqrt{n})$ méretű szeparált párosítás.

Kis diszkrepanciájú színezéseket is vizsgáltam, vagyis olyan ponthalmazokat, amelyekben a színosztályok számosságának különbsége felülről korlátozva van tetszőleges intervallumon. A szeparált párosítások egyszerűbbek az alternáló utaknál. Minden alternáló út megkapható egy szeparált párosításból és esetleges oldalélekből. A kis diszkrepancia sok alternálást jelent a színosztályok között, és ez magában véve hosszú metszésmentes, alternáló utat garantál. A szeparált párosítások további előnye az alternáló utakhoz képest, hogy vizsgálhatunk kis diszkrepanciájú színezéseket. Mindez a probléma mélyebb megértéséhez vezethet, és segítséget nyújthat az alsó korlát javításánál.

Tétel 7. *[12] Minden $d \leq 3$ diszkrepanciájú színezésre létezik $\frac{4n}{3}$ méretű szeparált párosítás.*

Sajnálatos módon már a három diszkrepancia esetének belátása is meglehetősen technikai. A bizonyítás különböző színű ívek párbaállításán alapszik. Az eredmény javítható lenne egy jobb párosítási algoritmussal.

Témavezetőm, Pavel Valtr, kutatócsoportjával pontok egy speciális helyzetét tekintettük. Ponthalmazunkat egy kettős ívre helyeztük, amelyet a következőképpen definiáltunk.

Egy *konvex* illetve egy *konkáv ív* véges ponthalmazok a síkon, amelyek egy szigorúan konvex illetve egy szigorúan konkáv függvény grafikonján fekszeknek. A *kettős ív* egy konvex és egy konkáv ívből tevődik össze úgy, hogy az ívek által meghatározott tetszőleges egyenes nem metszi a másik ívet, lásd a Figure 3 képet.

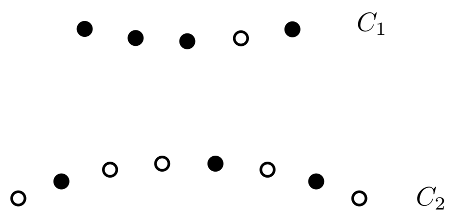

Figure 3: Kiegyensúlyozott színezésű kettős ív (C_1, C_2)

A fenti megszorítások mellett 2008.-ban bebizonyítottuk az alábbi tételt (Cibulka, Kynčl, Mészáros, Stolař, Valtr) :

Tétel 8. *[4] Ha a kettős ív mindkét íve tartalmazza legalább a pontok egyötödét, akkor létezik metszésmentes, alternáló Hamilton út a ponthalmazon. Ha viszont az egyik ív a pontok legfeljebb $\approx 1/29$-ét foglalja magába, akkor nem létezik ilyen út.*

A hosszú metszésmentes, alternaló, két színnel színezett utak témakörében több nyitott kérdés marad. Az legjobb alsó és felső becslés közti hézag konvex helyzetben figyelemre méltó. Az általános helyzet kivizsgálása is egy érdekes kutatási irány.

Végül elértünk a tézis utolsó részét képező eredményekhez. Pavel Valtr kutatócsoportjával megoldottuk Peter Winkler [5] egy sejtését. A probléma a következő. Bob felszeleteli a pizzát nem szükségszerűen egyenlő, körcikk alakú szeletekre, majd elosztja Alice-szel. Az osztás egy-egy szelet elvételet jelenti a soron lévő játékos által. Az első lépés Alice-szé. Ő ekkor bármelyik szeletet elveheti. Minden más lépésben csak egy olyan szelet vehető el, amely mellől már hiányzik szelet. Mekkora részt nyer el Alice a pizzából? Peter Winkler azt sejtette, hogy Alice mindig meg tudja szerezni a pizza 4/9-ét.

Miután Bob felszeletelte, a pizza ábrázolható egy $P = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$ körszerűen rendezett számsorozattal és a szeletek *súlyaival* $|p_i| \geq 0$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. Ha $1 < j \leq n$ és az egyik járékos a p_i szeletet választja a $(j-1)$-dik lépésben, valamint a másik játékos p_{i-1}-t vagy p_{i+1}-t a j-dik lépésben, akkor a j-dik lépés *csúszás*, különben *ugrás*.

Ha a szeletek száma páros volt, akkor könnyen belátható, hogy Alice-nek van stratégiája, hogy elnyerje a pizza felét. Ha a szeletek száma páratlan, akkor $P = p_0 p_1 \dots p_{n-1}$ helyett egy kapcsolódó körszerűen rendezett sorozatra, a $V = v_0 v_1 \dots v_{n-1} = p_0 p_2 \dots p_{n-1} p_1 p_3 \dots p_{n-2}$-re térünk át, amelyet *karakterisztikus körnek* nevezünk (ábrázolva a Figure 4 képen).

A fő eredményünk:

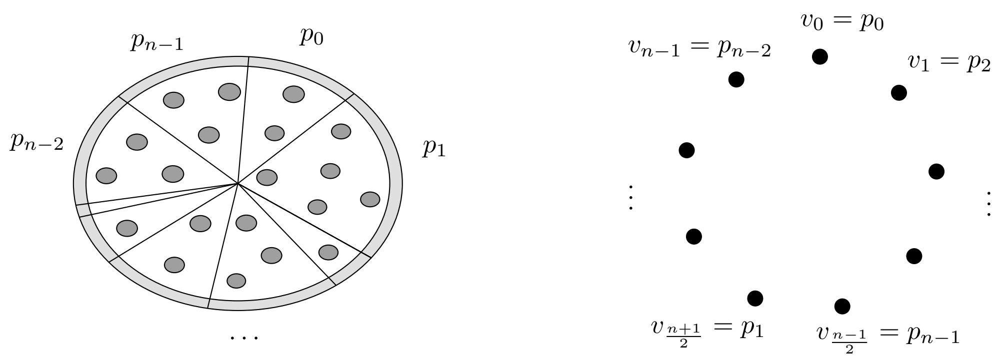

Figure 4: A pizza egy felszeletelése és a hozzá tartozó karakterisztikus kör.

Tétel 9. *[5] Tetszőleges P-re, Alice-nek van két ugrást tartalmazó stratégiája elnyerni $4|P|/9$-et.*

Meghatároztuk Alice garantált nyereségét tetszőleges számú szelet esetén.

Tétel 10. *[5] Az $n \geq 1$-re legyen $g(n)$ a maximális $g \in [0,1]$ úgy, hogy a pizza n szeletre vágásakor Alice-nek van stratégiája $g|P|$-t elnyerni. Ekkor*

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ 4/9 & \text{if } n \in \{15, 17, 19, \dots\}, \\ 1/2 & \textit{különben} \end{cases}$$

Sőt, Alice-nek nulla ugrást tartalmazó stratégiája van $g(n)|P|$ elnyerésére, ha n páros vagy $n \leq 7$; egy ugrást tartalmazó stratégiája van $g(n)|P|$ elnyerésére, ha $n \in \{9, 11, 13\}$; és két ugrást tartalmazó stratégiája van $g(n)|P|$ elnyerésére, ha $n \in \{15, 17, 19, \dots\}$.

Ha korlátozzuk Alice ugrásai számát, a következő eredményekhez jutunk.

Tétel 11. *[5]* (a) *Alice-nek van nulla ugrást tartalmazó stratégiája elnyerni $|P|/3$-ot, és az $1/3$ konstans éles.*
(b) *Alice-nek van egy ugrást tartalmazó stratégiája elnyerni $7|P|/16$-ot, és a $7/16$ konstans éles.*

A 10.Tételből adódóan, az alábbi tétel leírja a pizza összes minimális számú szeletre való felszeletelését, ahol Bob elnyerhet $5|P|/9$-et.

Tétel 12. *[5] Tetszőleges $\omega \in [0,1]$ etetén Bobnak van egy ugrást tartalmazó stratégiája $5|P|/9$-et nyerni, ha a pizzát 15 szeletre vágja a következő módon: $P_\omega = 0010100(1+\omega)0(2-\omega)00202$.*

Ezek a felszeletelések forgatástól, tükrözéstől és a szeletek súlyának tetszőleges $c > 0$ konstanssal való szorzásától eltekintve, leírják a pizza összes 15 szeletre való felszeletelését, ahol Bobnak van stratégiája $5|P|/9$-et elnyerni.

Az $\omega = 0$ és $\omega = 1$ értékekre a 12.Tételbeli felszeletelésben három különböző súlyú szelet fordul elő $0, 1, 2$. Ha minden szeletnek ugyanaz a súlya, akkor Alice megszerzi a pizza legalalább felét. De kétféle súlyú szelet már elegendő ahhoz, hogy fel lehessen szeletelni a pizzát úgy, hogy Bob 5/9-ét elnyerje.

Tétel 13. *[5] Forgatástól, tükrözéstől és a szeletek súlyának egy tetszőleges $c > 0$ konstanssal való szorzásától eltekintve, egyetlen felszeletelése van a pizzának 21 szeletre legfeljebb kétféle súlyú szelettel, ahol Bobnak van stratégiája $5|P|/9$-et nyerni. Ez a felszeletelés:* 001010010101001010101.

Leírtunk egy lineáris algoritmust Alice két ugrást tartalmazó stratégiájának megtalálására, amellyel $g(n)|P|$-t nyer el a 10.Tétel alapján.

Tétel 14. *[5] Létezik egy algoritmus, amely a pizza n szeletre való adott felszeletelésére, elvégez egy előszámítást $O(n)$ időben, a játék alatt pedig eldönti Alice minden lépését $O(1)$ idő alatt úgy, hogy Alice legfeljebb kétszer ugrik és legalább $g(n)|P|$-t nyer.*

A korábbi ötletek segítségével megadtunk egy hatékony algoritmust tetszőleges játékos optimális stratégiájának meghatározására. Az algoritmus dinamikus programozást alkalmaz, időigénye kvadratikus.

Claim 15. *[5] Létezik egy algoritmus, amely a pizza n szeletre való adott felszeletelésére, megad egy optimális stratégiát mindkét játékosnak $O(n^2)$ időben. Az algoritmus tárol egy optimális lépést a soron lévő játékosra a játék minden lehetséges $n^2 - n + 2$ pozíciójára.*

Bibliography

[1] M. Abellanas, J. García, G. Hernandez, M. Noy, P. Ramos, Bipartite embeddings of trees in the plane, Discrete Appl. Math. 93 (1999), 141–148.

[2] M. Abellanas, A. Garcia, F. Hurtado, and J. Tejel: Caminos alternantes, in: X Encuentros de Geometria Computacional (in Spanish), Sevilla, 2003, 7–12.

[3] J. Cibulka, J. Kynčl, V. Mészáros, R. Stolař, P. Valtr, Graph sharing games: complexity and connectivity, benyújtva. Előzetes verzió: TAMC 2010, Lecture Notes in Computer Science 6108, 340-349, Springer, Berlin, 2010.

[4] J. Cibulka, J. Kynčl, V. Mészáros, R. Stolař, P. Valtr, Hamiltonian alternating paths on bicolored double-chains, in: I. G. Tollis, M. Patrignani (Eds.), Graph Drawing 2008, Lecture Notes in Computer Science 5417, Springer, New York, 2009, pp. 181–192.

[5] J. Cibulka, J. Kynčl, V. Mészáros, R. Stolař, P. Valtr, The Solution of Peter Winkler's Pizza Problem, Fete of Combinatorics, Bolyai Society Mathematical Studies, Vol. 20, 63-93, Springer, 2010. Előzetes verzió: Combinatorial Algorithms (proceedings, IWOCA 2009), Lecture Notes in Computer Science 5874, 356-367, Springer, Berlin, 2009.

[6] Paul Erdős, személyes beszélgetés Pach Jánossal (ld. [10])

[7] P. Hajnal, V. Mészáros, A note on noncrossing path in colored convex sets, elfogadva, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science.

[8] A. Kaneko and M. Kano: Discrete geometry on red and blue poins in the plane — a survey, in: Discrete and Computational Geometry (B. Aronov et al., eds.), Springer-Verlag, Berlin, 2004, 551–570.

[9] Jan Kynčl, személyes beszélgetés

[10] J. Kynčl, J. Pach and G. Tóth , Long alternating paths in bicolored point sets in: Graph Drawing (J. Pach, ed.), Lecture Notes in Computer Science 3383, Springer-Verlag, Berlin, 2004, 340-348. Also in: Discrete Mathematics 308 (2008), 4315–4322.

[11] C. Merino, G. Salazar and J. Urrutia, On the length of the longest alternating path for multicoloured point sets in convex position. Discrete Mathematics Vol. 360, no. 15, pp. 1791–1797, 2006.

[12] V. Mészáros, Separated matchings on colored convex sets, benyújtva.