DOKTORI TÉZIS

MARÓTI ATTILA

1. Permutáció csoportok rendjei

A primitív permutáció csoportok rendjeinek becslése a 19. századi csoportelmélet egyik fontos problémája volt. Jordan néhány korai eredményét leszámítva valószinűleg az első, az alternáló csoportot nem tartalmazó primitív permutáció csoportok rendjeinek becslése Bochert nevéhez fűződik [7] (lásd még [17]-et vagy [50]-et): ha G primitív és $(S_n : G) > 2$, akkor $(S_n : G) \geq [\frac{1}{2}(n+1)]!$. Ez a korlát hasznos, mivel nagyon pontos az n fokszám legkisebb értékei esetén, de messze van attól, hogy a lehető legjobb eredmény legyen. Wielandt [51] egy, a Sylow részcsoportok rendjeinek becslésén alapuló technikáját felhasználva, Praeger és Saxl [41] egy exponenciális becsléshez jutott, nevezetesen 4^n-hez, ahol n a permutáció csoport fokszámát jelöli. A bizonyítás nehézkes. Teljesen más kombinatorikus gondolatmenetet használva, Babai [2] egy $e^{4\sqrt{n}\ln^2 n}$ becslést kapott uniprimitív (primitív de nem kétszeresen tranzitív) csoportok esetén. Az alternáló csoportot nem tartalmazó kétszeresen tranzitív csoportok rendjeire Pyber a $n^{32\log^2 n}$ felső korlátot igazolta $n > 400$ esetén [43]. A bizonyítás elemi volt és a [3] cikkből használt fel ötleteket. Ha ezen becsléseknél pontosabb korlátokat szeretnénk kapni, akkor az Aschbacher-O'Nan-Scott tételt és a véges egyszerű csoportok klasszifikációs tételét kell segítségül hívnunk. Cameron [14] egy $n^{c\ln\ln n}$ tipusú korlátot talált "ismert" kivételekkel, míg Liebeck [29] cikkéből egy $n^{9\log_2 n}$ becslés következik. A disszertációnkban a véges egyszerű csoportok klasszifikációs tételét használjuk, hogy a lehető legélesebb felső korlátokat adjuk a véges primitív permutáció csoportok rendjeire.

Először a következőt igazoljuk.

Tétel 1.1. *Legyen G egy n-ed fokú primitív permutáció csoport. Ekkor az alábbiak közül legalább egy teljesül.*
(i) A G csoport $S_m \wr S_r$-nek egy részcsoportja, amely tartalmazza $(A_m)^r$-et, ahol S_m az $\{1, ..., m\}$ halmaz k-elemű részhalmazainak halmazán hat és a koszorúszorzat hatásának fokszáma $n = \binom{m}{k}^r$;

(ii) $G = M_{11}$, M_{12}, M_{23} *vagy* M_{24} *és a csoport 4-tranzitív;*
(iii) $|G| \leq n \cdot \prod_{i=0}^{[\log_2 n]-1}(n-2^i) < n^{1+[\log_2 n]}$.

Ez a fent említett Liebeck eredmény egy erősebb alakja. A tétel lényegében azt allítja, hogy ha G egy primitív csoport, amely nem uniprimitiv, (i) alakú, és nem 4-tranzitív, akkor a (iii)-beli becslés igaz. A (iii)-beli korlát éles. Végtelen sok 3-tranzitív csoport van, mégpedig a 2^t ponton ható, $AGL(t,2)$ affin csoportok, amelyekre a korlát pontos. Ilyen példa még a 6 ponton ható S_5 szimmetrikus csoport. Az is igaz, hogy ezek az egyedüli, az (i) és (ii) pontokhoz nem sorolható csoportok, amelyek esetén egyenlőség áll fent. De van még egy végtelen csoport sorozat, amelyre a (iii)-beli korlát egészen közeli. Az $n = 2^t - 1$ fokú projektív $PSL(t,2)$ csoport rendje $t > 2$ esetén $\frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot \prod_{i=0}^{[\log_2 n]-1}(n+1-2^i) < n \cdot \prod_{i=0}^{[\log_2 n]-1}(n-2^i)$.

Ennek egy következménye az alábbi.

Következmény 1.1. *Legyen* G *az* S_n *egy primitív részcsoportja.*

(i) Ha G *nem* 3*-tranzitív, akkor* $|G| < n^{\sqrt{n}}$.

(ii) Ha G *nem tartalmazza* A_n*-et, akkor* $|G| < 50 \cdot n^{\sqrt{n}}$.

Ez Cameron [14] egy eredményének egy erős változata. Az (i)-beli becslés aszimptotikusan éles a 1.1 Tétel (i) pontjához sorolható uniprimitív csoportok esetén, valamint a Fano sík automorfizmus csoportja esetén. A (ii)-beli korlát éles a legnagyobb Mathieu csoportra. A [1] cikk és a [32] könyv a 1.1 Következmény egy félcsoportelméleti, illetve egy csoportelméleti alkalmazását tartalmazza. A 1.1 Tétel egy éles exponenciális korláthoz is vezet.

Következmény 1.2. *Ha* G *az* S_n*-nek egy olyan primitív részcsoportja, amely* A_n*-et nem tartalmazza, akkor* $|G| < 3^n$. *Továbbá ha* $n > 24$, *akkor* $|G| < 2^n$.

Ez javít a Praeger-Saxl [41] tételen. A bizonyítás azt mutatja, hogy M_{12} a "legnagyobb" primitív csoport. Az utóbbi állítás $n > 24$ követelményét az magyarázza, hogy M_{24} rendje nagyobb, mint 2^{24}. A prím szám tétel segítségével ez a következmény egy kicsit más formában is kimondható.

Következmény 1.3. *Ha* G *az* S_n*-nek egy olyan primitív részcsoportja, amely* A_n*-et nem tartalmazza és* $n > 24$, *akkor* $|G|$ *legfeljebb az* n*-nél nem nagyobb prímek szorzata.*

A [27] cikkben Kleidman és Wales leközölte a 2^{n-4}-nél nagyobb elemszámú primitív permutáció csoportok listáját. Ez a lista azonban eléggé hosszú és nehezen használható. A fenti eredményeinket használva, gyengítjük a fenti korlátot 2^{n-1}-re, s így a nagy elemszámú primitív csoportok egy rövidebb listáját kapjuk. Ezekre a kivételes csoportokra a [32] cikkben hivatkoznak. (Megjegyezzük, hogy a Kleidman-Liebeck lista is megkapható a fenti eredmények felhasználásával.)

Következmény 1.4. *Legyen G egy n-ed fokú primitív permutáció csoport, amely nem tartalmazza A_n-et. Ha $|G| > 2^{n-1}$, akkor G fokszáma legfeljebb 24 és G permutáció izomorf az alábbi 24 csoport valamelyikével.*

(i) *$AGL(t,q)$, ahol $(t,q) = (1,5)$, $(3,2)$, $(2,3)$, $(4,2)$; $A\Gamma L(1,8)$ és $2^4 : A_7$;*

(ii) *$PSL(t,q)$, ahol $(t,q) = (2,5)$, $(3,2)$, $(2,7)$, $(2,8)$, $(3,3)$, $(4,2)$; $PGL(t,q)$, ahol $(t,q) = (2,5)$, $(2,7)$, $(2,9)$; $P\Gamma L(2,8)$ és $P\Gamma L(2,9)$;*

(iii) *M_i, ahol $i = 10$, 11, 12, 23, 24;*

(iv) *A 10 ponton primitíven ható S_6 és a 12 ponton ható M_{11}.*

A fenti listából, egy indukciós gondolatmenettel, levezethető Liebeck és Pyber [30] egy tétele, miszerint egy n-ed fokú permutáció csoportnak legfeljebb 2^{n-1} konjugáltsági osztálya van. Az előző eredmény egy másik lehetséges alkalmazását Pyber [44] javasolta. Permutáció csoportok kompozíció faktorairól szóló megszorítások a csoportok rendjeire vonatkozó korlátokhoz vezetnek. Például Dixon [16] azt bizonyította, hogy egy n-ed fokú feloldható permutáció csoport rendje legfeljebb $24^{(n-1)/3}$ és Babai, Cameron, Pálfy [4] azt mutatták meg, hogy az S_n-nek minden olyan részcsoportja, amely nem tartalmaz d-nél ($d \geq 6$) nagyobb fokú alternáló kompozíció faktort, legfeljebb d^{n-1} elemszámú. A mi eredményeinket használva, Dixon tétele a következőképpen általánosítható és Babai-Cameron-Pálfy's becslése a következőképpen javítható.

Következmény 1.5. *Legyen G egy n-ed fokú permutáció csoport és legyen d egy 4-nél nem kisebb egész. Ha G-nek nincsen d-nél nagyobb fokú alternáló kompozíció faktora, akkor $|G| \leq d!^{(n-1)/(d-1)}$.*

Ez a korlát a lehető legélesebb. Ha az n egész szám d hatványa, akkor az S_d szimmetrikus csoport n/d példányának koszorúszorzatának rendje pontosan $d!^{(n-1)/(d-1)}$. A bizonyítás megint azt mutatja, hogy az M_{12} Mathieu csoport különleges jelentőségű.

Ennek a következménynek egy alkalmazása megtalálható Lubotzky és Segal [32] könyvének harmadik fejezetében. Lásd még Holt es Walton [25] cikkét.

2. Konjugáltsági osztályok számolása

Véges csoport esetén sokszor természetesebb komplex irreducibilis karaktereket számolni, mint konjugáltsági osztályokat. Ellenben van, amikor ez fordítva igaz. Itt egy példa. Nagao [38] bebizonyította, hogy ha G egy véges csoport és N egy normális részcsoport, akkor G komplex irreducibilis karaktereinek a száma legfeljebb N komplex irreducibilis karaktereinek a száma szorozva G/N komplex irreducibilis karaktereinek a számával. Később Gallagher [20] ezt igazolta konjugáltsági osztályok esetén. Úgy gondoljuk, hogy ez a második bizonyítás természetesebb. Ha $k(G)$-vel jelöljük G konjugáltsági osztályainak a számát, akkor Nagao tétele a következő formát ölti.

Lemma 2.1 (Nagao, [38]). *Ha G egy véges csoport és N egy normális részcsoport, akkor $k(G) \leq k(N) \cdot k(G/N)$.*

Ez a lemma nagyon fontos. Először arra használták, hogy azt igazolják, hogy p-feloldható csoportokra Brauer $k(B)$-problémája ekvivalens a $k(GV)$-problémával és legutóbb arra, hogy igazolják magát a $k(GV)$-problémát.

Most megadunk a 2.1 Lemmának egy újabb következményét.

Tétel 2.1 (Kovács, Robinson, [28]). *Ha G egy n-ed fokú permutáció csoport, akkor $k(G) \leq 5^{n-1}$.*

A bizonyítás indukciót használ. Az állítást először primitív, majd imprimitív, végül intranzitív csoportokra látjuk be. Az indukció első lépése az, hogy egy általános felső korlátot adunk a primitív csoportok konjugáltsági osztályainak a számára, majd az indukció többi lépésében alkalmazzuk a 2.1 Lemmát. Az első lépés a legnehezebb. A Kovács-Robinson bizonyítás a primitív permutáció csoportok rendjére vonatkozó Praeger-Saxl [41] korlát használatán alapult. Emiatt a 2.1 Tétel független a véges egyszerű csoportok klasszifikációs tételétől. Viszont ha javítani szeretnénk a 2.1 Tétel korlátján, akkor a véges egyszerű csoportok klasszifikációs tételét használnunk kell. Az előző fejezet eredményeit használva egy rövid bizonyítás adható a következő tételre.

Tétel 2.2 (Liebeck, Pyber, [30]). *Ha G egy n-ed fokú permutáció csoport, akkor $k(G) \leq 2^{n-1}$.*

Eredetileg a 2.2 Tételt az egyszerű csoportok konjugáltsági osztályainak számairól szóló becslések felhasználásával igazolták. (Valóban, Kovács és Robinson visszavezette a problémát a majdnem egyszerű csoportok esetére.) Mostanában az egyszerű csoportokról szóló Liebeck-Pyber-féle becsléseket Fulman és Guralnick [19] javítja. A mi disszertációnkban nem használjuk fel ezeket az eredményeket.

Tétel 2.3. *Bármely n-ed fokú permutáció csoportnak legfeljebb $3^{(n-1)/2}$ konjugáltsági osztálya van bármely 2-nél nagyobb n esetén.*

Ezt a tételt a [21] cikkben használták.

3. Csoportok valódi részcsoportokkal való fedése

Legyen G egy olyan csoport, amely véges sok valódi részcsoportjának halmazelméleti uniójaként áll elő. Cohn [15] a $\sigma(G)$ függvényt úgy definiálta, hogy az a legkisebb olyan m szám, amelyre igaz az, hogy G m valódi részcsoportjának halmazelméleti uniója. (Neumann [39] egy eredménye szerint, ha G egy olyan csoport, amely egy véges m valódi részcsoportjának uniója és egyik részcsoport sem hagyható ki a lefedésből, akkor az m csoport metszete G-ben véges indexű. Következésképpen σ vizsgálatakor elegendő feltennünk, hogy G véges.) Az egy könnyű feladat, hogy $\sigma(G)$ soha sem lehet 2; az legalább 3. Az olyan csoportokat, amelyek három valódi részcsoportjuk uniója, mint például $C_2 \times C_2$ is, a [46], [22] és a [12] cikkben vizsgálják. $\sigma(G)$ lehet 4, 5 és 6 is. Ezt a $C_3 \times C_3$, A_4 és a $C_5 \times C_5$ csoportok mutatják. Tomkinson [49] megmutatta, hogy nincs olyan G csoport, amelyre $\sigma(G) = 7$ teljesülne. Cohn [15] pedig azt bizonyította, hogy minden p^a prímhatványra létezik olyan feloldható G csoport, amelyre $\sigma(G) = p^a + 1$. Ezt Tomkinson [49] egészítette ki azzal, hogy $\sigma(G) - 1$ mindig prímhatvány minden feloldható G csoport esetén. Ugyanebben a cikkben Tomkinson felvetette $\sigma(G)$ vizsgálatát egyszerű G csoportok esetére. Valóban, a nem feloldható csoportok esete merőben más. Bryce, Fedri, Serena [13] bizonyos nem feloldható 2-szer 2-es mátrix csoportokat vizsgált véges testek felett, mégpedig a $(P)G(S)L(2,q)$ csoportokat és a $\frac{1}{2}q(q+1)$ formulát találták páros $q \geq 4$ esetén, valamint a $\frac{1}{2}q(q+1)+1$ formulát páratlan $q \geq 5$ esetén. Ezen felül Lucido [33] a $\sigma(Sz(q)) = \frac{1}{2}q^2(q^2+1)$ azonosságot találta, ahol $q = 2^{2m+1}$. A következőt bizonyítjuk.

Tétel 3.1. *Legyen $n > 3$, és legyen S_n és A_n az n-ed fokú szimmetrikus illetve alternáló csoport.*

(1) Ekkor $\sigma(S_n) = 2^{n-1}$ *ha* n *páratlan kivéve talán ha* $n = 9$, *és* $\sigma(S_n) \leq 2^{n-2}$ *ha* n *páros.*

(2) Ha $n \neq 7, 9$, *akkor* $\sigma(A_n) \geq 2^{n-2}$. *Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha* n *páros és* 4*-gyel nem osztható.*

A disszertációnkban többet bizonyítunk, mint amit a 3.1 Tétel állít. Pontos vagy aszimptotikusan pontos becsléseket fogunk adni minden esetben a $\sigma(A_p)$ esetet leszámítva, ahol p egy $(q^k - 1)/(q - 1)$ alakú prím szám, ahol q prímhatvány és k pozitív egész. Az S_9, S_{12}, A_7 és A_9 csoportok esetén csak azt igazoljuk, hogy $172 \leq \sigma(S_9) \leq 256$, $\sigma(S_{12}) \leq 761$, $\sigma(A_7) \leq 31$ és $\sigma(A_9) \geq 80$. Vegyük észre, hogy 761 és 31 olyan prímek, amelyek nem $q + 1$ alakúak, ahol q prímhatvány. Megmutatjuk, hogy $\sigma(G)$ lehet ilyen tipusú prím.

Propozíció 3.1. *A legkisebb Mathieu csoportra* $\sigma(M_{11}) = 23$.

Ezt az eredményt (tőlünk függetlenül) Holmes [23] is megkapta. A cikkében sok érdekes dolog található a sporadikus egyszerű csoportok fedéseiről. Ebben a cikkben például az található, hogy $\sigma(M_{22}) = 771$, $\sigma(M_{23}) = 41079$, $\sigma(O'N) = 36450855$, $\sigma(Ly) = 112845655268156$, $5165 \leq \sigma(J_1) \leq 5415$, valamint az, hogy $24541 \leq \sigma(McL) \leq 24553$. Ezen a ponton megjegyezzük, hogy Tomkinson [49] azt sejtette, hogy $\sigma(G)$ soha sem lehet 11 vagy 13.

A G csoport Γ kommutáló gráfja a következő. Legyenek Γ csúcsai a G csoport elemei. Két g, h csúcs, akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha g és h felcserélhető elemek. (A kommutáló gráf megmutatja, hogy mennyire Abel egy csoport. Lásd a [18] és [45] cikkeket.) Számos matematikus vizsgálta a $\alpha(G)$ mennyiséget, amely Γ legnagyobb üres részgráfjának elemszámát jelöli, és a $\beta(G)$ mennyiséget, amely Γ csúcsainak teljes részgráfokkal való minimális lefedésének elemszámát jelöli. (Lásd a [18], [37] és a [42] cikkeket.) Brown az $\alpha_n = \alpha(S_n)$ és a $\beta_n = \beta(S_n)$ függvények kapcsolatára volt kiváncsi. A [10] cikkben annak bizonyítása olvasható, hogy ezek az értékek meglepően közel állnak egymáshoz, bár $n \geq 15$ esetén ezek soha sem egyenlőek [11].

A 3.1 Tétel egy alkalmazásaként azt igazoljuk, hogy ha 'több' élt adunk a szimmetrikus csoport kommutáló gráfjához, akkor a megfelelő számok végtelen sok esetben megegyeznek. Legyen G egy csoport. Definiáljunk egy Γ' gráfot úgy, hogy annak csúcsai G elemei és két különböző elemet akkor kötünk össze éllel, ha G-nek valódi részcsoportját generálják. A kommutáló gráfhoz hasonlóan definiálhatjuk az $\alpha'(G)$ és a $\beta'(G)$ mennyiségeket e új, Γ' gráf esetén. Legyen $\alpha'_n = \alpha'(S_n)$ és $\beta'_n = \beta'(S_n)$. A tételünk most már kimondható.

Tétel 3.2. *Létezik a prím számoknak egy 1 sűrűségű olyan S részhalmaza, amelyre $\alpha'_n = \beta'_n$ teljesül minden $n \in S$ esetén.*

Az $\alpha'_n = \beta'_n$ azonosság n nagyon kis értékeire is igaz. Igaz-e bármely n-re?

Megjegyezzük, hogy a csoportok valódi részcsoportokkal való lefedésének problematikája több matematikus érdeklődését felkeltette már. A jelölt tudomása szerint az első ilyen jellegű munka Scorza 1926-os [46] cikke. Valószínűleg Neumann [39], [40] lehetett az első, aki a (nem feltétlenül véges) csoportok (Abel) részcsoportokkal való lefedése és a centrum indexe közötti kapcsolatot vizsgálta. Az érdeklődő olvasó fellapozhatja a [47] összefoglaló cikket. A téma egy más jellegű tartalmas összefoglalása a [26] cikkben található.

4. Halmazok, melyek elemei páronként generálnak egy lineáris csoportot

Legyen G egy két elemmel generálható véges csoport. Legyen $\mu(G)$ a legnagyobb olyan m egész szám, amelyre létezik G-nek egy olyan m-elemű X részhalmaza, amelyre igaz az, hogy X bármely két különböző eleme generálja G-t. Legyen n egy pozitív egész szám, q egy prímhatvány és V egy n-dimenziós vektortér a q-elemű test felett. Jelölje $[x]$ az x valós szám egész részét.

Tétel 4.1. *Legyen G a $(P)GL(n,q)$, $(P)SL(n,q)$ csoportok bármelyike. Legyen b az n szám legkisebb prím osztója és legyen $N(b)$ a V vektortér azon valódi altereinek a száma, amelyek dimenziója nem osztható b-vel. Ha $n \geq 12$, akkor*

$$\mu(G) = \frac{1}{b}\prod_{\substack{i=1 \\ b\nmid i}}^{n-1}(q^n - q^i) + [N(b)/2].$$

Legyen S_n az n-ed fokú szimmetrikus csoport. Az előző fejezetben azt állítottuk, hogy a prím számok azon n számokból álló halmaza, amelyekre $\mu(S_n) = \sigma(S_n) = 2^{n-1}$ teljesül, 1 sűrűségű. Egy csodálatos cikkben ezt az eredményt Blackburn [6] messzemenően általánosította, mégpedig úgy, hogy belátta, hogy ha n kellően nagy páratlan szám, akkor $\mu(S_n) = \sigma(S_n) = 2^{n-1}$ és ha n kellően nagy, 2-vel kongruens modulo 4 pozitív egész, akkor $\mu(A_n) = \sigma(A_n) = 2^{n-2}$ az n-ed fokú alternáló A_n csoportra. Ugyanebben a cikkben Blackburn felvetette azt a kérdést, hogy milyen kapcsolat van $\sigma(G)$ és $\mu(G)$ között egyszerű G csoportok esetén. Igaz-e például, hogy $\sigma(G)/\mu(G) \to 1$, amint $|G| \to \infty$? A projektív speciális lineáris csoportok esetében a válasz igenlő. A bizonyítás a [9] cikk 6. fejezetében olvasható. Sok esetben ennél többet is lehet állítani.

Tétel 4.2. *Legyen G a $(P)GL(n,q)$, $(P)SL(n,q)$ csoportok bármelyike. Legyen b az n szám legkisebb prím osztója, legyen $\left[{n \atop k}\right]_q$ az n-dimenziós V vektortér k-dimenziós altereinek a száma és legyen $N(b)$ a V azon valódi altereinek a száma, amelyek dimenziói b-vel nem oszthatók. Tegyük fel, hogy $n \geq 12$. Ekkor ha $n \not\equiv 2 \pmod 4$, vagy ha $n \equiv 2 \pmod 4$, q páratlan és $G = (P)SL(n,q)$, akkor*

$$\sigma(G) = \mu(G) = \frac{1}{b}\prod_{\substack{i=1 \\ b\nmid i}}^{n-1}(q^n - q^i) + [N(b)/2].$$

Ellenkező esetben $\sigma(G) \neq \mu(G)$ és

$$\sigma(G) = \frac{1}{2}\prod_{\substack{i=1 \\ 2\nmid i}}^{n-1}(q^n - q^i) + \sum_{\substack{k=1 \\ 2\nmid k}}^{(n/2)-1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \frac{q^{n/2}}{q^{n/2}+1}\begin{bmatrix} n \\ n/2 \end{bmatrix}_q + \epsilon,$$

ahol $\epsilon = 0$ ha q páros és $\epsilon = 1$ ha q páratlan.

A 4.2 Tétel Bryce, Fedri, Serena [13] korábbi eredményeit terjeszti ki. $\sigma(G)$ értékeit a $(P)GL(3,q)$, $(P)SL(3,q)$ csoportokra Serena [48] volt kedves velünk közölni.

Néhány megjegyzést muszáj tenni.

Dixon sejtésének egy gyors, Liebeck és Shalev [31] (lásd az 1.7-es Következményt) által kimondott következménye úgy szól, hogy létezik egy olyan univerzális c konstans, amelyre $\mu(G) \geq c \cdot n$ teljesül minden véges egyszerű G csoport esetén, ahol n jelöli a G csoport valódi részcsoportjainak legkisebb G-beli indexét.

Azt mondjuk, hogy egy csoport kiterjedése legalább k, ha bármely egységelemtől különböző $x_1, \ldots, x_k \in G$ elemekre, létezik $y \in G$, amelyre $G = \langle x_i, y\rangle$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén. Legyen $s(G)$ a legnagyobb olyan k szám, amelyre G-nek a kiterjedése legalább k. Sok cikk szól csoportok kiterjedéséről. Lásd például Breuer, Guralnick, Kantor [8] cikkét. Könnyű látni, hogy bármely nem ciklikus G csoportra, amely két elemmel generálhato, a $s(G) < \mu(G)$ egyenlőtlenség teljesül.

Köszönet nyilvánítás

Köszönöm a témavezetőmnek, Pyber László professzornak az önzetlen segítségét és vezetését. Ez a tézis a [34], [36], [35] és a [9] cikkekre épült.

References

[1] Araújo, J.; Folgado, L.; Mitchell, J. D. A classification of permutation groups that define idempotent generated semigroups. Submitted for publication.

[2] Babai, L. On the orders of uniprimitive permutation groups. *Ann. of Math.* **113**, (1981), 553-568.

[3] Babai, L. On the order of doubly transitive permutation groups. *Invent. Math.* **65**, (1981/82), no. 3, 473–484.

[4] Babai, L.; Cameron, P. J; Pálfy, P. P. On the order of primitive groups with restricted nonabelian composition factors. *J. Algebra* **79**, (1982), 161-168.

[5] Bereczky, Á.; Maróti, A. On solvable semiprimitive groups. Submitted to *J. Algebra.*

[6] Blackburn, S. Sets of elements that generates the symmetric group pairwise. *J. Combinatorial Theory Ser. A.*

[7] Bochert, A. Über die Transitivitätsgrenze der Substitutionengruppen, welche die Alternierende ihres Grades nicht einhalten. *Math. Ann.* **33**, (1889), 572-583.

[8] Breuer, T.; Guralnick, R. M.; Kantor, W. M. Probabilistic generation of finite simple groups, II. To appear in *J. Algebra.*

[9] Britnell, J. R.; Evseev, A.; Guralnick, R. M.; Holmes, P. E.; Maróti, A. Sets of elements that pairwise generate a linear group. To appear in the *Journal of Combinatorial Theory Ser. A.*

[10] Brown, R. Minimal covers of S_n by abelian subgroups and maximal subsets of pairwise noncommuting elements. *J. Combin. Theory Ser. A* **49**, (1988), no. 2, 294-307.

[11] Brown, R. Minimal covers of S_n by abelian subgroups and maximal subsets of pairwise noncommuting elements. II. *J. Combin. Theory Ser. A* **56**, (1991), no. 2, 285-289.

[12] Bruckheimer, M; Bryan, A. C; Muir, A. Groups which are the union of three subgroups. *Amer. Math. Monthly* **77**, (1970), 52-57.

[13] Bryce, R. A; Fedri, V; Serena, L. Subgroup coverings of some linear groups. *Bull. Austral Math. Soc.* **60**, (1999), no. 2, 227-238.

[14] Cameron, P. J. Finite permutation groups and finite simple groups. *Bull. London Math. Soc.* **13**, (1981), 1-22.

[15] Cohn, J. H. E. On n-sum groups. *Math. Scand.* **75**, (1994), no. 1, 44-58.

[16] Dixon, J. D. The Fitting subgroup of a linear solvable group. *J. Austral. Math. Soc.* **7**, (1967), 417-424.

[17] Dixon, J. D.; Mortimer, B. Permutation groups. *Springer-Verlag, New York* 1996.

[18] Erdős, P; Straus, E. G. How abelian is a finite group? *Linear and Multilinear Algebra* **3**, (1975/76), no. 4, 307-312.

[19] Fulman, J.; Guralnick, R. Derangements in simple and primitive groups. *Groups, combinatorics, geometry* (Durham, 2001), 99–121.

[20] Gallagher, P. X. The number of conjugacy classes in a finite group. *Math. Z.* **118** (1970), 175–179.

[21] Guralnick, R. M.; Robinson, R. G. On the commuting probability of a finite groups. *J. Algebra.*

[22] Haber, S; Rosenfeld, A. Groups as unions of proper subgroups. *Amer. Math. Monthly* **66**, (1959), 491-494.

[23] Holmes, P. E. Subgroup coverings of some sporadic groups, preprint.

[24] Holmes, P. E.; Maróti, A. Pairwise generation of sporadic simple groups. Submitted to *J. Algebra.*

[25] Holt, D. F.; Walton, J. Representing the quotient groups of a finite permutation group. *J. Algebra* **248**, (2002), 307-333.

[26] Jungnickel, D; Storme, L. Packing and covering groups with subgroups. *J. Algebra* **239**, (2001), no. 1, 191-214.

[27] Kleidman, P. B.; Wales, D. B. The projective characters of the symmetric groups that remain irreducible on subgroups. *J. Algebra* **138**, (1991), no. 2, 440–478.

[28] Kovács, L. G.; Robinson, G. R. On the number of conjugacy classes of a finite group. *J. Algebra* **160** (1993), no. 2, 441–460.
[29] Liebeck, M. W. On minimal degrees and base sizes of primitive permutation groups. *Arch. Math.* **43**, (1984), 11-15.
[30] Liebeck, M. W.; Pyber, L. Upper bounds for the number of conjugacy classes of a finite group. *J. Algebra* **198**, (1997), no. 2, 538–562.
[31] Liebeck, M. W.; Shalev, A. Simple groups, probabilistic methods, and a conjecture of Kantor and Lubotzky. *J. Algebra* **184** (1996), no. 1, 31–57.
[32] Lubotzky, A.; Segal, D. Subgroup growth, to appear in *Progress in Mathematics, Birkhäuser.*
[33] Lucido, M. S. On the covers of finite groups. *Groups St. Andrews 2001* Vol. II, 395-399, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **305**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
[34] Maróti, A. On the orders of primitive groups. *J. Algebra* **258** (2002), no. 2, 631-640.
[35] Maróti, A. Covering the symmetric groups with proper subgroups. *Journal of Combinatorial Theory Ser. A* **110** (2005), no. 1, 97-111.
[36] Maróti, A. Bounding the number of conjugacy classes of a permutation group. *Journal of Group Theory* **8** (2005), no. 3, 273-289.
[37] Mason, D. R. On coverings of a finite group by abelian subgroups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **83**, (1978), no. 2, 205-209.
[38] Nagell, T. The Diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$. *Ark. Math.* **4**, (1960), 185-187.
[39] Neumann, B. H. Groups covered by finitely many cosets. *Publ. Math. Debrecen* **3**, (1954), 227-242.
[40] Neumann, B. H. Groups covered by permutable subsets. *J. London Math. Soc.* **29**, (1954), 236-248.
[41] Praeger, C.; Saxl, J. On the order of primitive permutation groups. *Bull. London Math. Soc.* **12**, (1980), 303-308.
[42] Pyber, L. The number of pairwise noncommuting elements and the index of the centre in a finite group. *J. London Math. Soc. (2)* **35**, (1987), no. 2, 287-295.
[43] Pyber, L. On the orders of doubly transitive permutation groups, elementary estimates. *J. Comb. Theory (A)* **62**, (1993), 361-366.
[44] Pyber, L. Asymptotic results for permutation groups. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **11**, (1993), 197-219.
[45] Pyber, L. How abelian is a finite group? The mathematics of Paul Erdős, I, 372-384, *Algorithms Combin.* **13**, Springer, Berlin, 1997.
[46] Scorza, G. I gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi. *Boll. Un. Mat. Ital.* **5**, (1926), 216-218.
[47] Serena, L. On finite covers of groups by subgroups. *Advances in group theory* 2002, 173–190, Aracne, Rome, 2003.
[48] Serena, L. Personal communication, 2000.
[49] Tomkinson, M. J. Groups as the union of proper subgroups. *Math. Scand.* **81**, (1997), 191-198.
[50] Wielandt, H. Finite Permutation groups. *Acad. Press, New York*, 1964.
[51] Wielandt, H. Permutation groups through invariant relations and invariant functions. *Lecture Notes, Ohio State University, Columbus, Ohio*, 1969.