

Doktori értekezés tézisei

Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok és szabad spektrum

Kátai-Urbán Kamilla

Témavezetők: Dr. Megyesi László, egyetemi docens
Dr. Szabó Csaba, egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
2009

Bevezetés

A „kifejezések”– speciálisan a „szavak” – mindig központi szerepet játszottak az algebrai vizsgálatokban. Szemléletesen szólva a *kifejezések* változókból és műveleti jelekből felépített olyan jel-sorozatokat, amelyek adott típusú algebraik esetén „kiértékelhetők”, azaz végrehajtható műveletsorozatokat írnak elő, akármilyen elemeket is helyettesítünk a változók helyére. Kifejezés például egy Boole-kifejezés a Boole-algebraik körében, egy egész együtthatós polinom a gyűrűk körében, illetve változók és azok inverzeinek egy sorozata a csoportok körében. Ha egy kifejezést egy megfelelő típusú algebraon az összes lehetséges módon kiértékelünk, akkor egy függvényt – n -változós kifejezés esetén n -változós függvényt – kapunk az algebra felett. Az így kapható függvényt az algebra *kifejezésfüggvényeinek* hívjuk. Például a Boole-függvények a Boole-kifejezésekhez tartozó kifejezésfüggvények a kételemű Boole-algebra felett. Két kifejezést *ekvivalensnek* tekintünk egy adott algebra felett, ha nincs olyan kiértékelés, amely mellett a két kifejezés különböző értéket vesz fel, azaz, ha a két kifejezés ugyanazt a kifejezésfüggvényt határozza meg az algebraon. Egy algebra kifejezésfüggvényeinek száma az algebra fontos jellemzője. Például közismert, hogy a kételemű Boole-algebra felett az összes függvény, azaz összes Boole-függvény kifejezésfüggvény. Hasonlóan jól ismert tény, hogy ha egy véges test esetében az összes elemet, mint konstanst, azaz mint 0 -változós műveletet, felvesszük alapműveletnek a szokásos alapműveletek mellé, akkor az így kapott algebra felett minden függvény kifejezésfüggvény. Nyilvánvaló, hogy egy k -elemű algebra felett pontosan akkor áll elő minden függvény kifejezésfüggvényként, ha az n -változós kifejezésfüggvények száma k^{k^n} .

Algebraik egy osztályán valamely azonosság teljesülése ebben a terminológiában azt jelenti, hogy az azonosságot alkotó két kifejezés ekvivalens az osztály összes algebraja felett; röviden: a két ki-

fejezés ekvivalens az osztály felett. Az azonoságokkal definiálható osztályt *varietásnak* nevezik. Például vartietás az összes csoportok osztálya, az Abel-csoportok osztálya, a Boole-algebrák osztálya, a gyűrűk osztálya, stb. Ismert, hogy tetszőleges \mathcal{V} varietásban minden X halmaz esetén létezik úgynevezett X által generált szabad algebra, és izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott. A „szabad” jelző arra utal, hogy ez a „legáltalánosabb” X által generált algebra \mathcal{V} -ben abban az értelemben, hogy minden X által generált \mathcal{V} -beli algebra ennek homomorf képe. Az X által generált \mathcal{V} -beli szabad algebra egyik modellje az az $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ algebra, amelynek elemei a kifejezések \mathcal{V} feletti ekvivalenciaosztályai, és amelynek alapműveleteit a kifejezésekre természetes módon adódó alapműveletek indukálják. Ha $|X| = n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), akkor $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ helyett $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ -et írunk. Így $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ éppen a \mathcal{V} felett „lényegesen különböző”, azaz páronként nemekvivalens n -változós kifejezések száma. Bennünket olyan \mathcal{V} varietások érdekelnek, ahol $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ minden n -re véges, azaz \mathcal{V} -ben minden végesen generált algebra véges. Ekkor a \mathcal{V} varietás szabad spektrumán az $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ ($n \in \mathbb{N}_0$) sorozatot értjük. Például a Boole-algebrák varietásának szabad spektruma $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = 2^{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

Ha a \mathcal{V} varietás végesen generált, azaz \mathcal{V} -t egy \mathbf{A} véges algebra generálja, akkor könnyen látható, hogy $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ éppen az \mathbf{A} feletti kifejezésfüggvények száma. Speciálisan, ha \mathbf{A} elemszáma k , akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq k^{k^n}$. Másrészt, ha $k \geq 2$, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq n$. Azonban az adott korlátok között sem lehet tetszőleges a szabad spektrum, erről szólnak az úgynevezett hézagtételek. Például, ha a \mathcal{V} varietás végesen generált, akkor vagy van olyan c pozitív valós és k pozitív egész szám, amelyre $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \leq cn^k$, vagy pedig $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{n-k}$ teljesül valamely k pozitív egészre és bármely n -re (Theorem 12.2, [HM]). J. Berman [Be] a téma egy másik megközelítését adta: az egyszerű algebrák által generált varietások szabad spektrumát a szelíd kongruenciák nyelvén jellemezte.

Végesen generált varietásoknál gyakran szoros kapcsolat van a

generáló algebra struktúrája és a varietás szabad spektruma között. G. Higman [Hi] és P. Neumann [Ne] bizonyította, hogy ha \mathbf{G} véges csoport, akkor a \mathbf{G} által generált varietásban az n elem által generált relatívan szabad csoport mérete pontosan akkor exponenciális n -ben, ha \mathbf{G} nilpotens, egyébként pedig dupla-exponenciális.

Egy n -változós kifejezésfüggvény nem feltétlenül függ az összes változójától, azaz nem valódi n -változós kifejezésfüggvény. Az \mathbf{A} algebra feletti valódi n -változós kifejezésfüggvények számát $p_n(\mathbf{A})$ -val szokás jelölni, és a $p_n(\mathbf{A})$ ($n \in \mathbb{N}_0$) sorozat neve: az \mathbf{A} algebra p_n -sorozata. Szoros kapcsolat van az \mathbf{A} algebra p_n -sorozata és az \mathbf{A} által generált \mathcal{V} varietás szabad spektruma között, ugyanis tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ -ra $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(\mathbf{A})$. Az irodalomban számos cikk foglalkozik a p_n -sorozatok általános tulajdonságával, illetve azzal, hogy milyen összefüggések vannak az algebra és a p_n -sorozatának tulajdonságai között. Félcsoportok p_n -sorozatainak tulajdonságait vizsgálták a következő dolgozatokban. A [CDR1], [CR] cikkekben leírták az összes olyan véges félcsoportot, amelyek p_n -sorozatára van polinom korlát, azaz, van olyan k pozitív egész, amelyre $p_n \leq n^k$. A [CDR2] dolgozatban megadták a korlátos p_n -sorozattal rendelkező félcsoportokat félhálók, Boole-csoportok és derékszögű kötegek nilpotens bővítéseként.

Félcsoport-varietások szabad spektrumáról keveset lehetett tudni, mielőtt Szabó Csaba és a szerző elkezdte a félcsoportok szabad spektrumának szisztematikus vizsgálatát. Az értekezés az elért eredményeket tartalmazza. Ahogy a véges egyszerű csoportok tekinthetők a véges csoportok építőköveinek, úgy a véges félcsoportok építőkövei a véges teljesen 0-egyszerű félcsoportok. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok 9 varietást generálhatnak. Ezek mindegyike generálható egyetlen kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoporttal. A disszertációban ezen varietások szabad spektrumára adunk becslést.

Vizsgálataink során a következő módszereket alkalmazzuk. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok Rees-reprezentá-

ciójánál a félcsoporthok elemeit elempárokként ábrázolják. Ez indokolja, hogy az ilyen algebrák feletti kifejezések esetén jól tudjuk alkalmazni a páros gráfokat. A páros gráfok összefüggő komponensei a pontosztályokon partíciókat indukálnak. A partíciók számát becsülve adnuk becslést az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoporth által generált varietás szabad spektrumára. A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoporthok által generált 9 varietás közül egy esetében célszerű a kifejezésekhez páros gráfok helyett irányított gráfokat rendelni. Ekkor az irányított gráfokon vett zárt Euler-séták számát becsüljük, és ezt alkalmazzuk a varietás szabad spektrumának becsléséhez. Eredményeink összefoglalását az 1. táblázat tartalmazza, ahol $f(n) \sim g(n)$ azt jelöli, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$, valamint \sim_{\log} azt, hogy $\log f(n) \sim \log g(n)$ teljesül.

Az értekezésben szereplő eredmények a [KSz1], [KSz2], illetve [KSz3] dolgozatokban találhatóak. Kutatásaink nyomán a következő vizsgálatok születtek. S. Seif [Se] bizonyította, hogy egy nem ortodox monoid által generált \mathcal{V} varietásra $\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ (mint n függvénye) mindig exponenciális. I. Dolinka [Do] Higman–Neuman-típusú feltételt adott arra, hogy a félcsoporthok egy osztályának szabad spektruma mikor nem log-exponenciális. Kötegvarietások p_n -sorozatát vizsgálták [PW]-ben, [PSz]-ben és [Pl]-ben.

Előzmények

Az „egyszerű” kifejezésnek különbözik a jelentése az univerzális algebrában és a félcsoporthelméletben. Az univerzális algebrában egy algebrát egyszerűnek neveznek, ha nincs valódi nemtriviális kongruenciája. A félcsoporthelméletben az ilyen félcsoporthokat *kongruenciamentesnek* nevezik, és az olyan félcsoporthot hívják *egyszerűnek*, amely nem tartalmaz valódi ideált. A 0-egyszerű félcsoporth fogalma az utóbbi megfelelője a zéruselemes félcsoporthok körében. Egy zéruselemes félcsoporth *nullfélcsoporth*, ha bármely két elemének szorzata 0-val egyenlő. Megjegyezzük, hogy ha egy

zéruselemes félcsoporthat kongruenciamentes és nem kételemű nullfélcsoporthat, akkor szükségképpen 0-egyszerű is. Minden véges 0-egyszerű félcsoporthat úgynevezett *teljesen 0-egyszerű* félcsoporthat is, így a véges zéruselemes félcsoporthatok körében a kételemű nullfélcsoporthat kivételével minden kongruenciamentes félcsoporthat teljesen 0-egyszerű is. A teljesen 0-egyszerű félcsoporthatok alapvető szerepet játszanak a félcsoporthatelméletben, többek között azért, mert szerkezetük jól kezelhető: az úgynevezett Rees-mátrixkonstrukcióval megadható. Ennek egy speciális esetét ismertetjük a következő bekezdésben. Egy félcsoporthatot *kombinatorikusnak* nevezünk, ha csak triviális csoporthat tartalmaz részfélcsoporthatként.

Legyen Λ és I nemüres halmaz, továbbá $M = (m_{\lambda,i})$ olyan $\Lambda \times I$ típusú mátrix, amely csak 0-t és 1-et tartalmaz, és minden sora és minden oszlopa tartalmaz legalább egy 1-et. Az $(I \times \Lambda) \cup \{0\}$ halmazon bevezetjük a következő műveletet:

$$(i, \lambda)(j, \mu) = \begin{cases} (i, \mu), & \text{ha } m_{\lambda,j} = 1, \\ 0, & \text{ha } m_{\lambda,j} = 0, \end{cases}$$

$$(i, \lambda)0 = 0(i, \lambda) = 00 = 0.$$

Így kombinatorikus félcsoporthatot kapunk, amelyet kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoporthatnak nevezünk. Egy ilyen Rees-mátrixfélcsoporthatot (innen jön az elnevezés) mátrixokból álló félcsoporthatként is elképzelhetünk. Feleltessük meg a 0 elemnek az $I \times \Lambda$ típusú zérusmátrixot, az (i, λ) alakú elemnek pedig azt a mátrixot, ami $I \times \Lambda$ típusú, és pontosan egy nem 0 elemet tartalmaz, mégpedig 1-t, a mátrix i -edik sorának és λ -adik oszlopának metszéspontjában. Könnyen ellenőrizhető, hogy az eredeti félcsoporthattal izomorf zéruselemes félcsoporthatot kapunk, ha a műveletet a következőképpen értelmezzük ezen mátrixok halmazán: $A \circ B = AMB$, ahol a jobb oldalon a szokásos mátrixszorzást kell elvégezni. Az M mátrixot ezért *szendvicsmátrixnak* nevezik. Ennek a konstrukciónak a jelentőségét az adja, hogy a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű

félcsoportok izomorfiától eltekintve éppen a kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoportok.

N. Reilly [Re] bizonyította, hogy pontosan 9 olyan varietás van, amit kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak (ld. 1. táblázat 1. oszlopa). Ezen varietások mindegyike generálható egyetlen véges kombinatorikus 0-egyszerű félcsoporttal (ld. 1. táblázat 2. oszlopa), de ez a félcsoport izomorfia erejéig nem egyértelműen meghatározott.

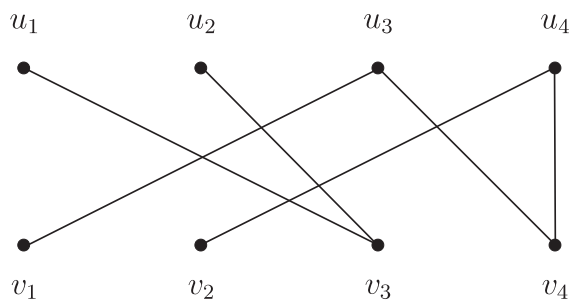
varietás	generáló félcsoport	szendvics-mátrix (M)	a varietás szabad spektruma
\mathcal{SL}	\mathbf{Y}	$[1]$	$2^n - 1$
\mathcal{LNB}	\mathbf{L}	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$n2^{n-1}$
\mathcal{RNB}	\mathbf{R}	$[1 \ 1]$	$n2^{n-1}$
\mathcal{NB}	\mathbf{N}	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$n(n+1)2^{n-2}$
\mathcal{B}	\mathbf{B}_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
\mathcal{LNB}_2	\mathbf{L}_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
\mathcal{RNB}_2	\mathbf{R}_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
\mathcal{NB}_2	\mathbf{N}_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sim_{\log} n^{2n}$
\mathcal{A}	\mathbf{A}_2	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\sim n^2 2^{n^2}$

1. táblázat.

Szabó Cs. és S. Seif az [SSz1]-ben és az [SSz2] cikkben kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok felett vizsgálta a kifejezések ekvivalenciáját. Ezt két esetre lehet szétbontani aszerint,

hogy a félcsoporthoz tartozó M szendvicsmátrix (ld. 1. táblázat 3. oszlopa) úgynevezett 1-blokk mátrix-e, vagy sem. A kifejezések kiértékelésekor fontos szerepe van annak, hogy mely változók követik egymást. Ezeket az összefüggéseket gráfok segítségével tehetjük szemléletesebbé.

A Rees-reprezentációnál láttuk, hogy egy kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoport elemeire gondolhatunk úgy, mint elem-párookra, ezért célszerű a kifejezésekhez is páros gráfokat rendelni. Legyen $t = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n -változós kifejezés, rendeljük t -hez a $G(t)$ páros gráfot az alábbi módon. Legyen a $G(t)$ páros gráf „felső” pontthalmaza $\{u_1, \dots, u_n\}$, az „alsó” pontthalmaza $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ily módon minden változónak két csúcsot feleltetünk meg. A kifejezések kiértékelésénél a változókhoz rendelt elem-párokhöz a megfelelő pontpárok tartoznak. A v_i pontból vezet él u_j -be a páros gráfban, ha az x_i változót x_j követi valahol a t kifejezésben, vagyis $x_i x_j$ részkifejezés t -ben. Így egy kiértékelésről könnyen el lehet dönteni, hogy milyen eredményt ad. Az 1. ábra a $t = x_1 x_3 x_2 x_4 x_4 x_3 x_1 x_3 x_2$ kifejezéshez tartozó $G(t)$ páros gráfot ábrázolja. Azt mondjuk, hogy az ábrán látható páros gráf



1. ábra.

$$t = x_1 x_3 x_2 x_4 x_4 x_3 x_1 x_3 x_2$$

komponensei az $\{u_1, u_2, v_3\}$ és $\{u_3, u_4, v_1, v_2, v_4\}$ pontthalmazok. Megjegyezzük, hogy a komponens fogalmát nem a hagyományos értelemben használjuk, ugyanis most csak pontokat tartalmaz, éle-

ket nem. Egy páros gráf komponensei *partíciókat indukálnak* a páros gráf pontosztályain, például az 1. ábrán a felső pontosztályon az $\{\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4\}\}$ partíciót, az alsó pontosztályon pedig a $\{\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_3\}\}$ partíciót indukálják. Ezen partíciók számának becslése az egyik módszerünk a szabad spektrum meghatározásában.

Az 1. táblázatban \mathbf{A}_2 az egyetlen olyan félcsoport, amihez tartozó szendvicsmátrix nem 1-blokk mátrix. Ebben az esetben egy kifejezéshez a következő, természetes módon adódó, többszörös él nélküli irányított gráfot rendeljük. Az irányított gráf annyi pontot tartalmazzon, ahány változó szerepel a kifejezésben. Ha $x_i x_j$ részkifejezés, akkor az x_i változónak megfelelő pontból vezessen él az x_j -nek megfelelő pontba.

Kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok által generált varietások szabad spektruma

Kötegeknek nevezzük az olyan félcsoportot, amelynek minden eleme idempotens. Az 1. táblázat első négy sorában szereplő varietások kötegvarietások, mégpedig rendre a félhálók, a balnormális kötegek, a jobbnormális kötegek, illetve a normális kötegek varietása. Bár ezen varietások szabad spektruma közismert, levezetjük a teljesen 0-egyszerű félcsoportoknál alkalmazott módszerekkel is.

A \mathcal{B} varietást a \mathbf{B}_2 félcsoport, az úgynevezett ötelemű kombinatorikus Brandt-félcsoport generálja. Igazoltuk [KSz1]-ben, hogy minden olyan partíciópárhoz, melyek osztályainak száma megegyezik, megadható egy-egy olyan t kifejezés, amely \mathbf{B}_2 -n valódi n -változós kifejezésfüggvényt definiál, és a hozzá tartozó $G(t)$ páros gráf komponensei éppen ezen partíciókat indukálják a gráf pontosztályain. Az indukált partíciók számát becslve aszimptotikus formulát kapunk a \mathbf{B}_2 félcsoport p_n -sorozatára.

4.8. Tétel. [KSz1] *Jelölje $p_n = p_n(\mathbf{B}_2)$ a \mathbf{B}_2 feletti valódi n -*

változós kifejezésfüggvények számát. Ekkor

$$\log p_n \sim 2n \log n.$$

Az előző eredményt felhasználva a \mathcal{B} szabad spektrumára a következő becslés adódik.

4.9. Tétel. [KSz1]

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{B}}(n)| \sim 2n \log n.$$

Az alábbi állítás az \mathbf{N}_2 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{R}_2 félcsoportok p_n -sorozatainak, illetve a $p_n(\mathbf{B}_2)$ -sorozatnak a viszonyát írja le.

4.10. Állítás. [KSz3] *Az \mathbf{N}_2 , \mathbf{L}_2 , \mathbf{R}_2 félcsoportok feletti valódi n -változós kifejezésfüggvények száma kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket:*

$$p_n(\mathbf{B}_2) \leq p_n(\mathbf{L}_2) = p_n(\mathbf{R}_2) \leq p_n(\mathbf{N}_2) \leq n^2 p_n(\mathbf{B}_2).$$

Az előző két eredmény alapján a következő összefüggést kapjuk.

4.11. Tétel. [KSz3] *Jelölje \mathcal{V} az $\mathcal{LN}\mathcal{B}_2$, $\mathcal{RN}\mathcal{B}_2$, \mathcal{NB}_2 varietások valamelyikét. Ekkor*

$$\log |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \sim 2n \log n.$$

A korábbiakban említettük, hogy az \mathbf{A}_2 félcsoport esetén a kifejezésekhez irányított gráf rendelhető. Az \mathbf{A}_2 feletti valódi n -változós kifejezésfüggvények számát a zárt Euler-sétával rendelkező irányított n pontú gráfok számával becsüljük. Ehhez szükségünk van a következő állításra.

4.13. Állítás. [KSz2] *Jelölje $D(n)$ azon n pontú irányított gráfok számát, amelyek rendelkeznek zárt Euler-sétával. Ekkor $D(n) = o(2^{n^2})$.*

A 4.13. Állítás segítségével asszimptotikus becslést adhatunk a \mathcal{A} varietás szabad spektrumára.

4.14. Tétel. [KSz2]

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{A}}(n)| \sim n^2 2^{n^2}.$$

Eredményeink összefoglalása az 1. táblázat 4. oszlopában található, azaz becslést adtunk az összes olyan varietás szabad spektrumára, amelyet kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok generálnak.

A \mathcal{B} , $\mathcal{LN}\mathcal{B}_2$, $\mathcal{RN}\mathcal{B}_2$, \mathcal{NB}_2 varietások szabad spektrumára adott becslések megegyeznek, pedig a varietások között a $\mathcal{B} < \mathcal{LN}\mathcal{B}_2 < \mathcal{NB}_2$ és a $\mathcal{B} < \mathcal{RN}\mathcal{B}_2 < \mathcal{NB}_2$ relációk állnak fenn. A páros gráf pontosztályain indukált partíciók elemszámát vizsgálva pontosíthatjuk a p_n -sorozatok számára adott korábbi korlátokat. A következő állítás $p_n(\mathbf{B}_2)$ -re ad meg az eddiginél jobb alsó és felső korlátot.

4.16. Állítás. [KSz3] *A \mathbf{B}_2 félcsoport p_n -sorozatára az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k^2 S(n, k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} n(k-1) S(n-1, k)^2 + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1) S(n-2, k)^2 \leq p_n(\mathbf{B}_2) \leq \sum_{k=1}^n k^2 k! S(n, k)^2 + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{n-1} n(k-1)(k-1)! S(n-1, k) S(n, k) + \sum_{k=1}^{n-1} n(n-1) k! S(n-1, k)^2 \end{aligned}$$

Hasonló becslések adhatók meg az \mathbf{L}_2 , \mathbf{R}_2 és az \mathbf{N}_2 félcsoportok p_n -sorozataira is. Az ezen félcsoportok feletti kifejezések ekvivalenciájánál az első és utolsó változók megválasztásának is szerepe van. Ebből adódik, hogy az összegzéseknél más együtthatókat kapunk.

Hivatkozások

- [Be] J. Berman, *Free spectra gaps and tame congruence types*, Int. J. Algebra Comput. **5** (1995), 651–672.
- [CDR1] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *The Berman conjecture is true for finite surjective semigroups and their inflations*, Semigroup Forum **62** (2001), 103–114.
- [CDR2] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc, *Finite semigroups with few term operations*, J. Pure Appl. Algebra **157** (2001), 205–214.
- [CR] S. Crvenković, N. Ruškuc, *Log-linear varieties of semigroups*, Algebra Universalis **33** (1995), 370–374.
- [Do] I. Dolinka, *On free spectra of finite completely regular semigroups and monoids*, J. Pure Appl. Algebra, submitted.
- [Hi] G. Higman, *The order of relatively free groups*, Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra 1965, Gordon and Breach Pub., 1967, pp. 153–163.
- [HM] D. Hobby, R. McKenzie, *The structure of finite algebras*, Contemporary Mathematics no. 76, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.
- [KSz1] K. Káta-Urbán, Cs. Szabó, *Free spectrum of the variety generated by the five element combinatorial Brandt semigroup*, Semigroup Forum **73** (2006), 253–260.
- [KSz2] K. Káta-Urbán, Cs. Szabó, *Free spectrum of the variety generated by the combinatorial completely 0-simple semigroups*, Glasgow Math. J. **49** (2007), 93–98.
- [KSz3] K. Káta-Urbán, Cs. Szabó, *The p_n sequence of semigroup varieties generated by combinatorial 0-simple semigroup*, Algebra Universalis **59** (2008), 435–446.

- [MW] L. Moser, M. Wyman, *An asymptotic formula for the Bell numbers*, Trans. Royal Soc. Can. **49** (1955), 49–54.
- [Ne] P. Neumann, *Some indecomposable varieties of groups*, Quart. J. Math. Oxford **14** (1963), 46–50.
- [PW] G. Pluhár, J. Wood, *The free spectra of varieties generated by idempotent semigroups*, Algebra Discr. Math. (2008), 89–100
- [PSz] G. Pluhár, Cs. Szabó, *The free spectrum of the variety of bands*, Semigroup Forum **76** (2008), 576–578.
- [Pl] G. Pluhár, *Szavak száma idempotens félcsoportokban – Kötégvarietások szabad spektruma*, Mat. Lapok (N.S.) **13** (2008), 44–53.
- [Re] N. Reilly, *Varieties generated by completely 0-simple semigroups*, manuscript.
- [Se] S. Seif, *Monoids with sub-log-exponential free spectra*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), 1162–1174.
- [SSz1] S. Seif, Cs. Szabó, *Algebra complexity problems involving graph homomorphisms, semigroups and the constraint satisfaction problem*, J. Complexity **19** (2003), 153–160.
- [SSz2] S. Seif, Cs. Szabó, *Computational complexity of checking identities in 0-simple semigroups and matrix semigroups over finite fields*, Semigroup Forum **72** (2006), 207–222.