KÉTVÁLTOZÓS PERIODIKUS FÜGGVÉNYEK FOURIER- ÉS KONJUGÁLT SORAINAK KONVERGENCIÁJA

DOKTORI (PhD) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

JENEI ÁRPÁD

TÉMAVEZETŐ:

DR. MÓRICZ FERENC
PROFESSZOR EMERITUS
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

SZEGED
2009

A matematikai analízisen belül a Fourier-sorok elméletének kialakulása a XVIII. században indult el. Az első mély, teljes matematikai precízséggel bebizonyított eredmény DIRICHLET (1805–1859) 1829-ben megjelent dolgozatában olvasható. Ez a tétel a véges sok monoton darabból álló függvények Fourier-sorainak konvergenciájára vonatkozik. Ezt az eredményt JORDAN (1838–1922) kiterjesztette korlátos változású függvényekre 1881-ben. Az irodalomban ezt szokták Dirichlet–Jordan-tételként említeni.

Értekezésünket az egyváltozós Fourier-sorok elméletének két klasszikus és két újabb eredményének ismertetésével kezdjük. Előbbiek: DINI (1845–1918), olasz matematikusnak a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájára vonatkozó kritériuma, valamint ennek analogonja – PRINGSHEIM (1850–1941), német matematikusnak a konjugált sorok pontonkénti konvergenciájára vonatkozó kritériuma. Az újabb tételek: a jól ismert Dirichlet–Jordan-tételnek BOJANIĆ által kidolgozott kvantitatív változata [2], valamint ennek TELYAKOVSKII [18] általi továbbfejlesztése. A disszertáció további részében ezen tételeket általánosítjuk kétváltozós függvényekre, illetve vizsgáljuk az általánosított Dini- és Pringsheim-kritériumok alkalmazhatóságát multiplikatív Lipschitz-/Zygmund-osztályokbeli függvényekre.

1. Ismert tételek egyváltozós függvényekre

Dini konvergencia-kritériuma

Komplex értékű, 2π szerint periodikus $f \in L^1(\mathbb{T})$ függvényeket tekintünk, ahol $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ az egydimenziós tórusz. Az

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx} \tag{1}$$

Fourier-sor pontonkénti konvergenciáját vizsgáljuk, ahol

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)e^{-iku}\,\mathrm{d}u, \quad k \in \mathbb{Z}$$

az f függvény Fourier-együtthatói. Ezen együtthatóknak egy egyszerű tulajdonságát a Riemann–Lebesgue-lemma biztosítja (lásd pl. [19, Vol. I, p. 48]):

$$\hat{f}(k) \to 0, \quad \text{ha} \quad |k| \to \infty.$$

Az (1)-ben szereplő sor nemszimmetrikus részletösszegeit az

$$S_{m,n}(f;x) := \sum_{k=m}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \quad m,n \in \mathbb{Z}, \quad m \le n$$

összeggel definiáljuk. Az $m = -n$ speciális esetben szimmetrikus részletösszegről beszélünk, és a rövidebb $S_n(f;x)$ $(n \in \mathbb{N})$ jelölést használjuk.

Dini konvergencia-kritériuma a következőképpen fogalmazható meg.

1.1. Tétel. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(i) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0-u)+f(x_0+u)-2f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{2}$$

akkor $S_n(f;x_0) \to f(x_0)$*, ha* $n \to \infty$.

(ii) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{3}$$

akkor $S_{m,n}(f;x_0) \to f(x_0)$*, ha* $m \to -\infty$ *és* $n \to \infty$.

Az (i) állítás bizonyítása jól ismert (lásd pl. [19, Vol. I, p. 52] abban az esetben, amikor $x_0 := 0$). Ez a Riemann–Lebesgue-lemmán és a következő előállításon alapul:

$$S_n(f;x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} [f(x_0-u)+f(x_0+u)-2f(x_0)]D_n(u)\,\mathrm{d}u,$$

ahol $D_n(u)$ a Dirichlet-magfüggvény. A (ii) állítás bizonyítása kevésbé ismert (lásd pl. [3]-at).

A (3) feltétel nyilvánvalóan teljesül minden $x_0 \in \mathbb{T}$-re, ha f valamely $\alpha > 0$ esetén a periodikus $\mathrm{Lip}(\alpha)$ Lipschitz-osztály eleme. Hasonlóképpen, a (2) feltétel is teljesül minden $x_0 \in \mathbb{T}$-re, ha f a periodikus $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ Zygmund-osztály eleme valamely $\alpha > 0$-ra.

Pringsheim konvergencia-kritériuma

Az (1)-ben szereplő Fourier-sor konjugált sorát, vagy röviden: a konjugált sort, a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} k)\hat{f}(k)e^{ikx} \tag{4}$$

képlettel definiáljuk, amelynek nemszimmetrikus, valamint szimmetrikus részletösszegeit $\widetilde{S}_{m,n}(f;x)$-szel, illetve $\widetilde{S}_n(f;x)$-szel jelöljük.

Emlékeztetünk, hogy az f függvény konjugált függvényét, vagy röviden: az $\widetilde{f}$ konjugált függvényt, Cauchy főérték integrálként definiáljuk:

$$\widetilde{f}(x) := (\mathrm{P.V.})\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-u)-f(x+u)}{2\tan\frac{1}{2}u}\,\mathrm{d}u = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi\right\}.$$

Jól ismert, hogy az $\widetilde{f}(x)$ függvény majdnem minden $x \in \mathbb{T}$ pontban létezik, valahányszor $f \in L^1(\mathbb{T})$, de általában $\widetilde{f} \notin L^1(\mathbb{T})$.

A következő tétel (i) állítása mint Pringsheim konvergencia-kritériuma ismert (lásd pl. [19, Vol. I, p. 52]).

1.2. Tétel. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(i) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0-u)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{5}$$

akkor $\widetilde{f}(x_0)$ *létezik mint Lebesgue-integrál, és* $\widetilde{S}_n(f;x_0) \to \widetilde{f}(x_0)$*, ha* $n \to \infty$.

(ii) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{6}$$

akkor $\widetilde{S}_{m,n}(f;x_0) \to \widetilde{f}(x_0)$*, ha* $m \to -\infty$ *és* $n \to \infty$.

Az (i) állítás bizonyítása a Riemann–Lebesgue-lemmán és az

$$\widetilde{S}_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-u)\widetilde{D}_n(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}[f(x-u)-f(x+u)]\widetilde{D}_n(u)\,\mathrm{d}u$$

előállításon alapul, ahol $\widetilde{D}_n(u)$ a konjugált Dirichlet-magfüggvény. A kevésbé ismert (ii) állítás bizonyítása megtalálható Chernoff cikkében [3].

Az (5) és a (6) feltételek nyilvánvalóan teljesülnek minden $x_0 \in \mathbb{T}$ pontban, ha f a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ periodikus Lipschitz-osztály eleme valamely $\alpha > 0$ esetén.

Bojanić és Telyakovskii tételei

A jólismert Dirichlet–Jordan-tétel szerint a korlátos változású, periodikus f függvény Fourier-sora minden x pontban az $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ értékhez konvergál, azaz

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Ezen konvergencia sebességére Bojanić [2] a következő becslést adta abban az esetben, ha feltesszük, hogy $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

1.3. Tétel. *Ha a* 2π *szerint periodikus* f *függvény korlátos változású a* $[-\pi,\pi]$ *intervallumon, akkor minden* x *és* $n = 1, 2, \dots$ *esetén igaz a következő becslés:*

$$|S_n(f,x)-f(x)| \le \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right), \tag{7}$$

ahol $\varphi_x(u) := f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$*,* $u \in [0,\pi]$.

Megjegyezzük, hogy a $\varphi_x(t)$ függvény is korlátos változású és folytonos a $t = 0$ pontban, ezért a $V(\varphi_x,[0,t])$ változásfüggvény szintén folytonos $t = 0$-ban, következésképp

$$V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Ebből pedig következik, hogy a (7) egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés nullához konvergál, miközben $n \to \infty$, azaz az 1.3. Tétel a Dirichlet–Jordan-tétel élesítése.

Az 1.3. Tétel eredményét Telyakovskii [18] fejlesztette tovább a következőképpen.

1.4. Tétel. *Legyen $m_1 = 1 < m_2 < \cdots < m_p < \ldots$ a természetes számok olyan sorozata, amely kielégíti a*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \leq \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

feltételt, ahol $A > 1$ állandó. Ha az f függvény korlátos változású, akkor minden μ és x esetén érvényes a következő becslés:

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_\mu(f, x)| &= \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \\
&\leq \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{m_{p_0}-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| + \sum_{p=p_0}^{\infty} \left| \sum_{k=m_p}^{m_{p+1}-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \\
&\leq \frac{CA}{\mu+1} \sum_{k=1}^{\mu+1} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right),
\end{aligned}$$

ahol $m_{p_0-1} \leq \mu < m_{p_0}$ és A a (8) feltételbeli konstans.

Telyakovskii bizonyításának sémája alapján, ha felhasználjuk az alábbi 1.5. Lemmát (lásd [12, 1-2. Lemma]), a tételben szereplő egyenlőtlenség kicserélhető egy erősebbre:

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \leq m \leq M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \leq \frac{(\pi+4)A}{\pi m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right).$$

Az állításnak ezt az alakját terjesztjük ki kétváltozós függvényekre.

1.5. Lemma. *Ha a természetes számok $m_1 = 1 < m_2 < \ldots < m_p < \ldots$ sorozata kielégíti a (8) feltételt, akkor igazak a következő becslések:*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \leq m \leq M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \leq \frac{\pi A}{m_{p_0} u}, \quad \text{ha} \quad 0 < u \leq \pi,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \max_{m_p \leq m \leq M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \leq (\pi+2)A, \quad \text{ha} \quad u \in \mathbb{R}.$$

2. Új eredmények kétváltozós függvényekre

Dini konvergencia-kritériumának kétváltozós kiterjesztése

A komplex értékű, mindkét változójában 2π szerint periodikus $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ függvény kettős Fourier-sorát a következőképpen értelmezzük:

$$f(x, y) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k, l) e^{i(kx+ly)}, \tag{9}$$

ahol $\hat{f}(k,l)$ az f függvény Fourier-együtthatói:

$$\hat{f}(k,l) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} f(u,v) e^{-i(ku+lv)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v, \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2.$$

A Riemann–Lebesgue-lemma (lásd pl. [19, Vol. II, p. 301]) alapján, ha $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$\hat{f}(k,l) \to 0, \quad \text{ha} \quad \max\{|k|,|l|\} \to \infty.$$

Ez a tény alapvető fontosságú tételeink bizonyítása során.

A (9)-ben szereplő sor nemszimmetrikus téglányösszegeit így definiáljuk:

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y) := \sum_{k=m_1}^{n_1} \sum_{l=m_2}^{n_2} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)}, \quad m_j, n_j \in \mathbb{Z}, \quad m_j \le n_j, \quad j = 1,2.$$

Az $m_j = -n_j$ speciális esetben a rövidebb $S_{n_1,n_2}(f;x,y) := S_{-n_1,n_1;-n_2,n_2}(f;x,y)$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ jelölést használjuk, és szimmetrikus téglányösszegről beszélünk.

Első tételünkben [10, 1. Tétel] elegendő feltételt adunk a (9)-beli Fourier-sor szimmetrikus téglányösszegeinek adott $(x_0,y_0) \in \mathbb{T}^2$ pontbeli konvergenciájára. Ez a konvergencia az $f(x,y_0)$, $x \in \mathbb{T}$, és $f(x_0,y)$, $y \in \mathbb{T}$ ($x := x_0$ és $y := y_0$ rögzített), úgynevezett marginális függvények egyváltozós Fourier-sora konvergenciájának viselkedésétől is függ. Ezekre az egyváltozós Fourier-sorokra a következő jelöléseket használjuk:

$$f(x,y_0) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\cdot,y_0)^\wedge(k) e^{ikx}, \tag{10}$$

ahol

$$f(\cdot,y_0)^\wedge(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u,y_0) e^{-iku} \, \mathrm{d}u, \quad k \in \mathbb{Z};$$

és analóg módon

$$f(x_0,y) \sim \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x_0,\cdot)^\wedge(l) e^{ily}, \tag{11}$$

ahol

$$f(x_0,\cdot)^\wedge(l) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x_0,v) e^{-ilv} \, \mathrm{d}v, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

2.1. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $A, A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, és valamely $(x_0,y_0) \in \mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1} v^{-1} \Delta_{2,2}(f; x_0, y_0; u, v; A_1 + A_2 - A) \in L^1(\mathbb{T}^2).$$

Ha a (10)-ben és a (11)-ban szereplő egyváltozós Fourier-sorok szimmetrikus részletösszegei A_1-hez és A_2-höz kovergálnak az $x := x_0$, illetve az $y := y_0$ pontokban, akkor

$$S_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0) \to A, \quad \text{ha} \quad n_j \to \infty, \ j = 1,2. \tag{12}$$

Fordítva, ha (12) teljesül, és ha a (10)-ben és a (11)-ban szereplő Fourier-sorok egyikének szimmetrikus részletösszegei konvergensek, akkor a másik Fourier-sor szimmetrikus részletösszegei is konvergensek.

Az 1.1. Tételbeli (i) állítást a 2.1. Tétellel kombinálva abban a speciális esetben, amikor $A = A_1 = A_2 := f(x_0, y_0)$, kapjuk az alábbi következményt [10, 1. Korollárium].

2.1. Korollárium. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $f(\cdot, y_0) \in L^1(\mathbb{T})$ *és* $f(x_0, \cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ *valamely* $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$*-re. Ha*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{2,2}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{13}$$

$$u^{-1}[f(x_0 - u, y_0) + f(x_0 + u, y_0) - 2f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

és

$$v^{-1}[f(x_0, y_0 - v) + f(x_0, y_0 + v) - 2f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor $S_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(x_0, y_0)$, *ha* $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$.

Második tételünkben [10, 2. Tétel] a (9)-beli Fourier-sor nemszimmetrikus téglányösszegeinek adott pontbeli konvergenciájára adunk elégséges feltételt.

2.2. Tétel. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ *és valamely* $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$*-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{14}$$

Ha a (10)-beli és a (11)-beli egyváltozós Fourier-sorok nemszimmetrikus részletösszegei $f(x_0, y_0)$*-hoz konvergálnak, akkor*

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(x_0, y_0), \quad \text{ha} \quad m_j \to -\infty \text{ és } n_j \to \infty, \; j = 1, 2. \tag{15}$$

Fordítva, ha (15) teljesül, és ha a (10)-beli és a (11)-beli Fourier-sorok egyikének nemszimmetrikus részletösszegei $f(x_0, y_0)$*-hoz konvergálnak, akkor a másik Fourier-sor nemszimmetrikus részletösszegei is ehhez konvergálnak.*

Ha az 1.1. Tétel (ii) állítását kombináljuk a 2.2. Tétellel, akkor az alábbi következményhez [10, 2. Korollárium] jutunk.

2.2. Korollárium. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $f(\cdot, y_0) \in L^1(\mathbb{T})$ *és* $f(x_0, \cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ *valamely* $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$*-re. Ha a (14) feltétel, valamint az alábbi két kiegészítő feltétel fennáll:*

$$u^{-1}[f(u, y_0) - f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}) \quad \text{és} \quad v^{-1}[f(x_0, v) - f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor (15) is teljesül.

Nyilvánvaló, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{T}^2) \cap \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$ esetén, akkor a (13) feltétel teljesül minden (x_0, y_0) pontban. Hasonlóan, ha $f \in L^1(\mathbb{T}^2) \cap \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$ esetén, akkor a (14) feltétel minden (x_0, y_0) pontban teljesül.

Pringsheim konvergencia-kritériumának kétváltozós kiterjesztése

Az egyváltozós (4) konjugált sor általánosításaként a (9)-beli kettős sorból többféle módon is képezhetünk konjugált sort. Az első változóra vonatkozó konjugált sort a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign}k)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} \tag{16}$$

kettős összeggel definiáljuk, a második változóra vonatkozó konjugált sor alakja:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign}l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}, \tag{17}$$

végül a mindkét változó szerinti konjugált sor a következő:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign}k)(-i\operatorname{sign}l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}. \tag{18}$$

A (16)–(18) konjugált sorok nemszimmetrikus téglányösszegeire rendre az

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y),\quad \widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y)\quad \text{és}\quad \widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y)$$

jelöléseket használjuk, ugyanezen sorok szimmetrikus téglányösszegekre pedig az egyszerűbb $\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x,y)$, $\widetilde{S}^{(0,1)}_{n_1,n_2}(f;x,y)$ és $\widetilde{S}^{(1,1)}_{n_1,n_2}(f;x,y)$ jelöléseket alkalmazzuk.

A kettős konjugált sorok konvergenciájánál a (10) és a (11) Fourier-sorok konjugált sorai szintén fontos szerepet játszanak:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign}k)f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx}, \tag{19}$$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign}l)f(x_0,\cdot)^\wedge(l)e^{ily}. \tag{20}$$

Következő tételünkben [11, 1. Tétel] a (16) konjugált sor szimmetrikus téglányösszegeinek konvergenciájára adunk szükséges és elegendő feltételt.

2.3. Tétel. *Legyen $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$. Ha valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v)\in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{21}$$

akkor az $\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)$ szimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $n_j\to\infty$ $(j=1,2)$ esetén, ha a (19) konjugált sor szimmetrikus részletösszegei konvergensek az $x:=x_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.

A 2.3. Tételnek a (17) konjugált sorra vonatkozó szimmetrikus megfelelője a következőképpen hangzik [11, 2. Tétel].

2.4. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Ha valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{2,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{22}$$

akkor az $\widetilde{S}^{(0,1)}_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0)$ szimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén, ha a (20) konjugált sor szimmetrikus részletösszegei kovergensek az $y := y_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.

Erősebb feltételt megadva, a (16)–(18) konjugált sorok nemszimmetrikus téglányösszegeinek konvergenciájára is következtethetünk [11, 3. Tétel].

2.5. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, és tegyük fel, hogy valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{23}$$

(i) *Az $\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$ nemszimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén, ha a (19) konjugált sor nemszimmetrikus részletösszegei konvergensek az $x := x_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.*

(ii) *Az $\widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$ nemszimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén, ha a (20) konjugált sor nemszimmetrikus részletösszegei konvergensek az $y := y_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.*

(iii) *Az $\widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$ nemszimmetrikus téglányösszegeknek létezik határértéke $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén.*

Megjegyezzük, hogy a 2.3. Tételben szerpelő (21) feltétel biztosan teljesül minden $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ pontban, ha $f \in \mathrm{LZ}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$-ra; a 2.4. Tételben lévő (22) feltétel teljesül minden $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ pontban, ha $f \in \mathrm{ZL}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$-ra; és a 2.5. Tételben szereplő (23) feltétel teljesül, ha $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$-ra.

Ha a fenti 2.3–2.5. Tételeket kombináljuk az egyváltozós függvényekre érvényes az 1.2. Tétellel, akkor a következő korolláriumokat [11, 1-3. Korollárium] kapjuk.

2.3. Korollárium. *Tegyük fel, hogy $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ és a (21) feltétel valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re teljesül. Ha $f(\cdot, y_0) \in L^1(\mathbb{T})$ és*

$$u^{-1}[f(x_0 + u, y_0) - f(x_0 - u, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor $\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(\cdot, y_0)^{\sim}(x_0)$, ha $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$.

2.4. Korollárium. *Tegyük fel, hogy* $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ *és a (22) feltétel valamely* $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$*-re teljesül. Ha* $f(x_0, \cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ *és*

$$v^{-1}[f(x_0, y_0 + v) - f(x_0, y_0 - v)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor $\widetilde{S}^{(0,1)}_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(x_0, \cdot)^{\sim}(y_0)$*, ha* $n_j \to \infty$ *(*$j = 1, 2$*).*

2.5. Korollárium. *Tegyük fel, hogy* $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ *és a (23) feltétel valamely* $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$*-re teljesül.*

(i) *Ha* $f(\cdot, y_0) \in L^1(\mathbb{T})$ *és*

$$u^{-1}[f(x_0 + u, y_0) - f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor $\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(\cdot, y_0)^{\sim}(x_0)$*, ha* $m_j \to -\infty$ *és* $n_j \to \infty$ *(*$j = 1, 2$*).*

(ii) *Ha* $f(x_0, \cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ *és*

$$v^{-1}[f(x_0, y_0 + v) - f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor $\widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(x_0, \cdot)^{\sim}(y_0)$*, ha* $m_j \to -\infty$ *és* $n_j \to \infty$ *(*$j = 1, 2$*).*

Telyakovskii tételének kétváltozós kiterjesztése

Telyakovskii tételének kiterjesztésekor az alábbi tételt [12, 3. Tétel] kapjuk.

2.6. Tétel. *Legyenek* $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ *és* $n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_q < \dots$ *a természetes számoknak olyan sorozatai, amelyek kielégítik a következő két feltételt:*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \le \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1, 2, \dots, \tag{24}$$

$$\sum_{q=q_0}^{\infty} \frac{1}{n_q} \le \frac{B}{n_{q_0}}, \quad q_0 = 1, 2, \dots, \tag{25}$$

ahol $A, B > 1$ *állandók. Ha az* f *függvény korlátos változású Hardy–Krause értelemben (lásd [4]), akkor minden* p_0, q_0 *esetén és minden* (x, y) *pontban igazak a következő becslések:*

$$\begin{aligned}\sum_{p=p_0}^{\infty} \sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \max_{n_q \le n \le N < n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k, l) e^{i(kx+ly)} \right| \le \\ \le \frac{(\pi + 4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} \hat{f}(k, l) e^{i(kx+ly)} \right| \le \\ \le \frac{(\pi + 4)A}{m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x(f(\cdot, y)), \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) + \\ + \frac{(\pi + 4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right)\end{aligned} \tag{27}$$

és

$$(28)\qquad \sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{n_q\le n\le N<n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=0}^{m_{p_0}-1} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} \right| \le$$

$$\le \frac{(\pi+4)B}{n_{q_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)), \left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right) +$$

$$+\frac{(\pi+4)^2AB}{m_{p_0}n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right),$$

ahol A és B a (24) és a (25) becslésekbeli konstansok, valamint

$$\varphi_{xy}(u,v) := f(x+u,y+v) + f(x-u,y+v) +$$

$$+f(x+u,y-v + f(x-u,y-v) - 4f(x,y), \quad (u,v)\in[0,\pi]\times[0,\pi].$$

A 2.6. Tételből közvetlenül adódik a következő állítás [12, Következmény].

2.6. Korollárium. *Ha a mindkét változója szerint 2π-periodikus $f(x,y)$ függvény korlátos változású a $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ téglalapon és*

$$(29)\quad f(x,y) = \frac{1}{4}[f(x-0,y-0) - f(x-0,y+0) - f(x+0,y-0) + f(x+0,y+0)],$$

akkor minden $m,n\ge 0$ esetén

$$|S_{m,n}(f;x,y) - f(x,y)| \le \frac{C_1A}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} V\left(\varphi_x(f(\cdot,y)), \left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right) +$$

$$+\frac{C_2B}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)), \left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right) +$$

$$+\frac{C_3AB}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{n+1} V\left(\varphi_{xy}, \left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right).$$

Nyilvánvaló, hogy a 2.6. Tétel erősebb, mint ez a korollárium. Megjegyezzük, hogy Móricz [13, 3. Tétel] más módszerek felhasználásával szintén bizonyította a korolláriumban szereplő egyenlőtlenséget, a konstansokat is megadva.

Megjegyezzük, hogy a 2.6. Korollárium tulajdonképpen Bojanić tételének (1.3. Tétel) kiterjesztése kétváltozós, Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvényekre.

Végül utalunk arra, hogy Hardy tétele [8], amely a Dirichlet–Jordan-tételnek (lásd pl. [19, Vol. I, p. 57]) a kiterjesztése kétváltozós, Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvényekre, megkapható a fenti következményből.

2.7. Tétel (Hardy). *Ha a mindkét változójában 2π szerint periodikus $f(x,y)$ függvény korlátos változású a $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ téglalapon és kielégíti a (29) feltételt, akkor Fourier-sora minden (x,y) pontban az $f(x,y)$ értékhez konvergál.*

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Móricz Ferenc professzornak, témavezetőmnek önzetlen segítségéért, folyamatos támogatásáért és hasznos tanácsaiért, melyekkel jelen értekezés megírását, illetve korábbi kutatómunkámat segítette.

Valamint szeretném köszönetemet kifejezi S.A. Telyakovskii professzornak, a moszkvai Sztyeklov Matematikai Intézet munkatársának, aki moszkvai részképzésem alatt segítette és írányította munkámat.

Hivatkozások

[1] C. R. Adams and J. A. Clarkson, Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 711-730.

[2] R. Bojanić, An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **26 (40)** (1979), 57-60.

[3] P. R. Chernoff, Pointwise convergence of Fourier series. *Amer. Math. Monthly*, **87** (1980), 399-400.

[4] J. A. Clarkson and C. R. Adams, On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 824-854.

[5] M. Fréchet, Extension au cas des intégrals multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes, *Nouvelles Annales Math.*, **10** (1910), 241-256.

[6] V. Fülöp, Double cosine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **70** (2004), 91-100.

[7] V. Fülöp, Double sine series with nonnegative coefficients and Lipschitz classes, *Colloq. math.*, **105** (2006), 25-34.

[8] G. H. Hardy, On double Fourier series, *Quart. J. Math.*, **37** (1906), 53-79.

[9] E. W. Hobson, *The Theory of Funcitons of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 3rd ed. Vol. I, Cambridge Univ. Press (London–New York, 1927).

[10] Á. Jenei and F. Móricz, Extension of the Dini test to double Fourier series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **72** (2006), 135-145.

[11] Á. Jenei and F. Móricz, Pointwise convergence of series conjugate to double Fourier series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **72** (2006), 555-567.

[12] A. Йенеи, О скорости сходимости рядов Фурье двумерных функций ограниченной вариации, *Anal. Math.*, **35** (2009), megjelenés alatt.

[13] F. Móricz, A quantitative version of the Dirichlet–Jordan test for double Fourier series, *J. Approx. Theory*, **71** (1992), 344-358.

[14] F. Móricz, Order of magnitude of double Fourier coefficients of functions of bounded variation, *Analysis*, **22** (2002), 335-345.

[15] F. Móricz and W. R. Wade, An analogue of a theorem of Ferenc Lukács for double Walsh–Fourier series, *Acta Math. Hungar.*, **95 (4)** (2002), 323-336.

[16] С.А. Теляковский, О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации, *Тр. МИАН*, **219** (1997), 378-386.

[17] С.А. Теляковский, О равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации, *Тр. МИАН*, **232** (2001), 318-326.

[18] С.А. Теляковский, О скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации, *Матем. заметки*, **72** (2002), 949-953.

[19] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I-II, Cambridge Univ. Press, U.K., (1959).

Nyilatkozat

Alulírott, Dr. Móricz Ferenc professzor emeritus nyilatkozom arról, hogy az *„Extension of the Dini test to double Fourier series”* című cikk Jenei Árpáddal közös munkánk, melyben a jelölt saját munkája hozzávetőlegesen 50%.

Továbbá nyilatkozom arról is, hogy a *„Pointwise convergence of series conjugate to double Fourier series”* című cikk Jenei Árpáddal közös munkánk, melyben a jelölt munkája hozzávetőlegesen 50%.

Szeged, 2009. január 30.

Dr. Móricz Ferenc
professzor emeritus

Nyilatkozat

Alulírott, Dr. Móricz Ferenc professzor emeritus nyilatkozom arról, hogy az *„Extension of the Dini test to double Fourier series”* és a *„Pointwise convergence of series conjugate to double Fourier series”* című cikkeket sem eddig, sem ezután nem használom fel doktori fokozat megszerzésére.

Szeged, 2009. január 30.

Dr. Móricz Ferenc
professzor emeritus