DOKTORI (PhD) ÉRTEKEZÉS

JENEI ÁRPÁD

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

SZEGED
2009

KÉTVÁLTOZÓS PERIODIKUS FÜGGVÉNYEK FOURIER- ÉS KONJUGÁLT SORAINAK KONVERGENCIÁJA

DOKTORI (PhD) ÉRTEKEZÉS

JENEI ÁRPÁD

TÉMAVEZETŐ:

DR. MÓRICZ FERENC
PROFESSZOR EMERITUS
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

SZEGED
2009

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A matematikai analízis módszereit már az ókori görög matematikusok is alkalmazták egyes geometriai problémák megoldására. Pl. ARKHIMÉDESZ (i.e. 287–212) a parabolaív alatti területet és a gömb térfogatát olyan módszerekkel határozta meg, amelyeket ma az integrálszámítás módszerei közé sorolunk. Ezután egy hosszú szünet következett az analízis fejlődésében. Majd csak a XVII. században kapott újabb lendületet, főleg a mechanika által felvetett problémák megoldása kapcsán, NEWTON (1642–1727) és LEIBNIZ (1646–1716) munkássága révén.

A XVIII. században és a XIX. század elején az analízis gyors fejlődésnek indult. Viszont ezzel egyidőben a nem ellégé precíz, egzakt tárgyalás következtében ellentmondások is megjelentek. Például CAUCHYnál (1789–1857), a sorelmélet egyik megalapozójánál is találhatunk néhány hamis állítást. Ő azt állította, hogy folytonos függvények konvergens sorának összegfüggvénye is folytonos. 1826-ban ABEL (1802–1829) adott erre egy ellenpéldát, egy olyan trigonometrikus sort, amelynek összegfüggvénye nem folytonos. Ezt az ellentmondást később az egyenletes konvergencia fogalma oldotta fel.

Az analízisen belül a Fourier-sorok elméletének kialakulása a XVIII. században indult el. Már csillagászati számításoknál is felbukkantak trigonometrikus sorok periodikusságuk miatt. De a trigonometrikus sorok elméletének létrejötte egy mechanikai probléma körül kialakult vitának köszönhető, amely D'ALEMBERT (1717–1783), EULER (1707–1783) és *Daniel* BENOULLI (1700–1782) között alakult ki a XVIII. század közepén. Ez a probléma a rezgő húr problémája volt. Bernoulli 1753-ban a húr alakjának leírására trigonometrikus sort kapott eredményül. Ezzel az állítással Euler nem értett egyet. Szerinte ugyanis a húr kezdeti alakja nemcsak analitikus függvény lehet, hanem olyan „mechanikai görbe” is, amelynek egyes darabjai között semmilyen szerves összefüggés nincs, és így „egész menetében” ugyanazzal a trigonometrikus sorral nem írható le. D'Alembert pedig azt is kétségbe vonta, hogy bármely analitikus függvény trigonometrikus sorba fejthető.

Fordulatot jelentettek a probléma megoldásában FOURIER (1768–1830) 1807-től megjelenő dolgozatai, amelyek a hővezetés elméletével foglalkoztak. Ezekben újból felmerült a tetszőleges függvények trigonometrikus sorokkal történő közelítésének kérdése. Fourier azt állította, hogy ilyen előállítás lehetséges. Ezek az eredmények olyan jelentősek és a tapasztalattal egyezőek voltak, hogy a kor legkiválóbb matematikusai inkább arra összpontosítottak, hogy ezeket a feltevéseket bizonyítsák, mintsem megcáfolják.

A Fourier-sorok elméletének első mély, teljes matematikai precízséggel bebizonyított eredménye Dirichlet (1805–1859) 1829-ben megjelent dolgozatában olvasható. Ez a tétel a véges sok monoton darabból álló függvények Fourier-sorainak konvergenciájára vonatkozik. Ezt az eredményt Jordan (1838–1922) kiterjesztette korlátos változású függvényekre 1881-ben. Azóta számos matematikus kutatta és kutatja még ma is a matematikának ezt az ágát.

Értekezésünk első fejezetét a klasszikus (egyváltozós) Fourier-sorok elméletének tanulmányozásához szükséges definíciók és jelölések bemutatásával kezdjük. Definiáljuk többek között a Fourier- és konjugált sorokat, megadjuk a Lipschitz- és Zygmund-osztályok, valamint a korlátos változású függvények osztályának definícióját. Majd ismertetünk két klasszikus és két újabb eredményt. Előbbiek: Dini (1845–1918), olasz matematikusnak a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájára vonatkozó kritériuma, valamint ennek analogonja – Pringsheim (1850–1941), német matematikusnak a konjugált sorok pontonkénti konvergenciájára vonatkozó kritériuma. Itt utalunk ezen tételeknek a Lipschitz-, valamint Zygmund-osztályokkal való kapcsolatára is. Az újabb tételek: a korlátos változású függvényekre ismert Dirichlet–Jordan-tételnek Bojanić által kidolgozott kvantitatív változata [2], valamint ennek Telyakovskii [18] általi továbbfejlesztése.

A második fejezetben áttérünk kétváltozós függvényekre. Először ismertetjük az első fejezetbeli egyváltozós fogalmak és definíciók kétváltozós kiterjesztését. Többek között definiáljuk a kettős Fourier- és konjugált sorokat, a multiplikatív Lipschitz-, Zygmund-, Lipschitz–Zygmund- és Zygmund–Lipschitz-osztályokat, valamint a Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvények osztályát. Ezek után megfogalmazzuk az első fejezetben ismertett tételek kétváltozós függvényekre vonatkozó általánosításait (Bojanić tételének kivételével, amelyet Móricz [14, 3. Tétel] már korábban általánosított).

A harmadik fejezetben ezen új eredmények bizonyítása, valamint néhány, a bizonyítás során felhasznált segédtétel szerepel.

1. fejezet

Ismert tételek egyváltozós függvényekre

Ebben a fejezetben először felsoroljuk az egyváltozós függvények Fourier-sorának vizsgálata során használt jelöléseket és szükséges definíciókat. Majd ismertetjük (bizonyítás nélkül) Dini, Pringsheim, Bojanić és Telyakovskii tételeit.

1.1. Definíciók, jelölések

Fourier- és konjugált sorok

Komplex értékű, 2π szerint periodikus $f \in L^1(\mathbb{T})$ függvényeket tekintünk, ahol $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ az egydimenziós tórusz. Az

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \tag{1.1}$$

Fourier-sor pontonkénti konvergenciáját vizsgáljuk, ahol

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{-iku} \, \mathrm{d}u, \quad k \in \mathbb{Z}$$

az f függvény Fourier-együtthatói. Ezeknek egy egyszerű tulajdonsága adódik a Riemann–Lebesgue-lemma alapján (lásd pl. [19, Vol. I, p. 48]):

$$\hat{f}(k) \to 0, \quad \text{ha} \quad |k| \to \infty.$$

Az (1.1)-ben szereplő sor nemszimmetrikus részletösszegeit az

$$S_{m,n}(f; x) := \sum_{k=m}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \le n$$

összeggel definiáljuk. Az $m = -n$ speciális esetben szimmetrikus részletösszegről beszélünk, és a rövidebb

$$S_n(f;x) := S_{-n,n}(f;x), \quad n \in \mathbb{N}$$

jelölést használjuk.

Az (1.1)-ben szereplő Fourier-sor konjugált sorát, vagy röviden: a konjugált sort, a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} k)\hat{f}(k)e^{ikx} \tag{1.2}$$

összeggel definiáljuk, amelynek nemszimmetrikus, valamint szimmetrikus részletösszegeit $\widetilde{S}_{m,n}(f;x)$-szel, illetve $\widetilde{S}_n(f;x)$-szel jelöljük.

Emlékeztetünk, hogy az f függvény konjugált függvényét, vagy röviden: az $\widetilde{f}$ konjugált függvényt, Cauchy főérték integrálként definiáljuk:

$$\widetilde{f}(x) := (\text{P.V.})\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-u)-f(x+u)}{2\tan\frac{1}{2}u}\,du = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi\right\}.$$

Jól ismert, hogy az $\widetilde{f}(x)$ függvény majdnem minden $x \in \mathbb{T}$ pontban létezik, valahányszor $f \in L^1(\mathbb{T})$, de általában $\widetilde{f} \notin L^1(\mathbb{T})$.

Vizsgálataink során szükségünk lesz még a

$$D_n(u) := \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dirichlet-magfüggvényre, illetve a

$$\widetilde{D}_n(u) := \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(-i \operatorname{sign} k)e^{iku} = \sum_{k=1}^{n}\sin ku, \quad n \in \mathbb{N}$$

konjugált Dirichlet-magfüggvényre. Valamint használni fogjuk a

$$\varphi_x(u) := f(x+u) + f(x-u) - 2f(x), \quad u \in [0,\pi] \tag{1.3}$$

jelölést.

Függvényosztályok

A fejezet második részében ismertetésre kerülő tételek közül kettő jól alkalmazható Lipschitz-, illetve Zygmund-osztályokbeli függvényre; kettő pedig korlátos változású függvények Fourier-sorára vonatkozó állítást tartalmaz. Ezért most ezen függvényosztályok közismert definíciói következnek.

1.1.1. Definíció (Lispchitz-osztály). *Egy 2π szerint periodikus f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ Lischitz-osztályba (másként: α-rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget), ha létezik olyan $C = C(f)$ konstans, hogy*

$$|f(x+u) - f(x)| \leq C|u|^\alpha \quad \text{minden } x, u \text{ esetén.} \tag{1.4}$$

1.1.2. Definíció (Zygmund-osztály). *Egy folytonos, 2π szerint periodikus f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ Zygmund-osztályba, ha létezik olyan $C = C(f)$ konstans, amelyre*

$$|f(x-u) + f(x+u) - 2f(x)| \leq C|u|^\alpha \quad \text{minden } x, u \text{ esetén.} \tag{1.5}$$

Megjegyzések.

1. Ha $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $\alpha > 1$-re, akkor f állandó.
2. Ha $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$ valamely $\alpha > 2$-re, akkor f lineáris függvény. Ha f még periodikus is, akkor f állandó.
3. Ha $0 < \alpha < 1$, akkor

   $$\mathrm{Lip}(\alpha) = \mathrm{Zyg}(\alpha),$$

   ha pedig $\alpha = 1$, akkor

   $$\mathrm{Lip}(1) \subset \mathrm{Zyg}(1).$$

Ez utóbbi megjegyzés a magyarázata annak, hogy [19, Vol. I, pp. 42-44]-ben a Λ_* jelölést használják Zyg(1)-re.

1.1.3. Definíció (Korlátos változású függvények osztálya). *Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényt korlátos változásúnak nevezzük, ha az $[a, b]$ intervallum tetszőleges*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

beosztásaihoz tartozó

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

összegek az osztópontok számától és eloszlásától független korlát alatt maradnak. Ezen összegek halmazának felső határát (szuprémumát) az f függvénynek az $[a, b]$ intervallumon való teljes változásának nevezzük, és $V(f, [a, b])$-vel jelöljük.

Megjegyzés. Ha az f függvényről feltesszük, hogy korlátos változású, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük azt is, hogy az f függvényre minden x esetén igaz az

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) \tag{1.6}$$

egyenlőség.

1.2. Dini, Pringsheim, Bojanić és Telyakovskii tételei

Ebben a részben ismertetjük a fent említett matematikusok tételeit, valamint utalunk arra, hogy ezen tételek mely függvényosztályok esetén alkalmazhatók eredményesen. Az értekezés második részében ezeket a tételeket terjesztjük ki kétváltozós függvényekre (Bojanić tételének kivételével, amelyet Móricz [14, 3. Tétel] már korábban általánosított).

Dini konvergencia-kritériuma

Dini konvergencia-kritériuma a Fourier-sorok szimmetrikus, illetve nemszimmetrikus részletösszegeinek pontonkénti konvergenciájára ad elegendő feltételt.

1.2.1. Tétel. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(i) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re és* A *konstansra*

$$\frac{f(x_0 - u) + f(x_0 + u) - 2A}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{1.7}$$

akkor

$$S_n(f; x_0) \to A, \quad \textit{ha} \quad n \to \infty.$$

(ii) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{1.8}$$

akkor

$$S_{m,n}(f; x_0) \to f(x_0), \quad \textit{ha} \quad m \to -\infty \quad \textit{és} \quad n \to \infty.$$

Az (i) állítás bizonyítása jól ismert (lásd pl. [19, Vol. I, p. 52] abban az esetben, amikor $x_0 := 0$ és $A := f(x_0)$). Ez a Riemann–Lebesgue-lemmán és az

$$S_n(f; x_0) - A = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} [f(x_0 - u) + f(x_0 + u) - 2A] D_n(u) \, du \tag{1.9}$$

előállításon alapul, ahol $D_n(u)$ a Dirichlet-magfüggvény.

A (ii) állítás bizonyítása kevésbé ismert (lásd pl. [3] abban az esetben, amikor $x_0 := 0$ és $A := 0$).

Ha a tétel és a függvényosztályok kapcsolatát vizsgáljuk, akkor láthatjuk, hogy az (1.8) feltétel nyilvánvalóan teljesül minden $x_0 \in \mathbb{T}$-re, ha f valamely $\alpha > 0$ esetén a periodikus $\mathrm{Lip}(\alpha)$ Lipschitz-osztály eleme. Hasonlóképpen, az (1.7) feltétel is teljesül az $A := f(x_0)$ konstanssal minden $x_0 \in \mathbb{T}$-re, ha f a periodikus $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ Zygmund-osztály eleme valamely $\alpha > 0$-ra.

Megjegyezzük, hogy a (i) állítás alkalmazható a szakadási helyeknél is. Például, tegyük fel, hogy f-nek léteznek a bal és jobb oldali határértékei az x_0 pontban, jelöljük ezeket $f(x_0 - 0)$-val és $f(x_0 + 0)$-val. Tegyük fel még, hogy f-nek léteznek a féloldali differenciálhányadosai x_0-ban, azaz létezik a következő két féloldali határérték:

$$\frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{-u} \quad \text{és} \quad \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u}, \quad \text{ha} \quad u \to 0 + 0. \tag{1.10}$$

Ekkor az (i) állítást alkalmazva az $A := [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]/2$ konstanssal, (1.8) alapján kapjuk, hogy

$$S_n(f; x_0) \to \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)], \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A differenciálhatósági feltételt jelentősen lehet enyhíteni. Elegendő megkövetelni, hogy (1.10)-ben mindkét hányados integrálható legyen Lebesgue értelemben.

Pringsheim konvergencia-kritériuma

A következő tétel a konjugált sor részletösszegeinek konvergenciájára ad elegendő feltételt. A tétel (i) állítása mint Pringsheim konvergencia-kritériuma ismert (lásd pl. [19, Vol. I, p. 52]).

1.2.2. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

(i) *Ha valamely $x_0 \in \mathbb{T}$-re*

$$\frac{f(x_0 + u) - f(x_0 - u)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{1.11}$$

akkor $\widetilde{f}(x_0)$ létezik mint Lebesgue-integrál, és

$$\widetilde{S}_n(f; x_0) \to \widetilde{f}(x_0), \quad \textit{ha} \quad n \to \infty.$$

(ii) *Ha valamely $x_0 \in \mathbb{T}$-re*

$$\frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{1.12}$$

akkor

$$\widetilde{S}_{m,n}(f; x_0) \to \widetilde{f}(x_0), \quad \textit{ha} \quad m \to -\infty \quad \textit{és} \quad n \to \infty.$$

Az (i) állítás bizonyítása a Riemann–Lebesgue-lemmán és a következő előállításon alapul:

$$\widetilde{S}_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x - u) \widetilde{D}_n(u) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} [f(x - u) - f(x + u)] \widetilde{D}_n(u) \,\mathrm{d}u, \tag{1.13}$$

ahol $\widetilde{D}_n(u)$ a konjugált Dirichlet-magfüggvény.

A kevésbé ismert (ii) állítás bizonyítása megtalálható például Chernoff cikkében [3].

Az 1.2.2. Tételnek a függvényosztályokkal való kapcsolatáról elmondhatjuk, hogy az (1.11) és az (1.12) feltétel nyilvánvalóan teljesül minden $x_0 \in \mathbb{T}$ pontban, ha f a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ periodikus Lipschitz-osztály eleme valamely $\alpha > 0$ esetén.

Bojanić és Telyakovskii tételei

A jólismert Dirichlet–Jordan-tétel szerint a korlátos változású, periodikus f függvény Fourier-sora, ha feltesszük (1.6)-ot is, akkor minden x pontban az $f(x)$ értékhez konvergál, azaz

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - S_n(f,x)] = 0.$$

Ezen konvergencia sebességére Bojanić [2] a következő becslést adta.

1.2.3. Tétel. *Ha a 2π szerint periodikus f függvény korlátos változású a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, akkor minden x és $n = 1, 2, \dots$ esetén igaz a következő becslés:*

$$|S_n(f,x) - f(x)| \le \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right). \tag{1.14}$$

Megjegyezzük, hogy a $\varphi_x(t)$ függvény is korlátos változású, valamint (1.6) következtében folytonos a $t = 0$ pontban, ezért a $V(\varphi_x, [0,t])$ változásfüggvény szintén folytonos a $t = 0$ pontban, következésképpen

$$V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) \to 0, \quad k \to \infty.$$

Ebből pedig következik, hogy az (1.14) egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés nullához konvergál, miközben $n \to \infty$, azaz az 1.2.3. Tétel a Dirichlet–Jordan-tétel élesítése.

Az 1.2.3. Tétel eredményét Telyakovskii [18] fejlesztette tovább a következőképpen.

1.2.4. Tétel. *Legyen $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ a természetes számok olyan sorozata, amely kielégíti a*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \le \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1, 2, \dots \tag{1.15}$$

feltételt, ahol $A > 1$ állandó. Ha az f függvény korlátos változású, akkor minden μ és x esetén érvényes a következő becslés:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - S_\mu(f,x)| &= \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \right| \leq \\
&\leq \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{m_{p_0}-1} \hat{f}(k)e^{ikx} \right| + \sum_{p=p_0}^{\infty} \left| \sum_{k=m_p}^{m_{p+1}-1} \hat{f}(k)e^{ikx} \right| \leq \\
&\leq \frac{CA}{\mu+1} \sum_{k=1}^{\mu+1} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right),
\end{aligned}
$$

ahol $m_{p_0-1} \leq \mu < m_{p_0}$ és A az (1.15) feltételbeli konstans.

Telyakovskii bizonyításának sémája alapján, ha felhasználjuk a 3.3.1–3.3.2. Lemmákat (lásd 3.3. rész), a tételben szereplő egyenlőtlenség kicserélhető egy erősebbre:

$$
(1.16) \qquad \sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \leq m \leq M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \hat{f}(k)e^{ikx} \right| \leq \frac{(\pi+4)A}{\pi m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right).
$$

Az állításnak ezt az alakját fogjuk majd kiterjeszteni kétváltozós függvényekre.

2. fejezet

Új eredmények kétváltozós függvényekre

Ebben a fejezetben ismertetjük az előző fejezetben szereplő definíciók, jelölések kétváltozós megfelelőit, valamint megfogalmazzuk az 1. fejezetbeli tételek kétváltozós általánosításait.

2.1. Definíciók, jelölések

Kettős Fourier-sorok és marginális függvények

A komplex értékű, mindkét változójában 2π szerint periodikus $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ függvény kettős Fourier-sorát az

$$f(x,y) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \tag{2.1}$$

kettős sorral értelmezzük, ahol

$$\hat{f}(k,l) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} f(u,v) e^{-i(ku+lv)} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2$$

az f függvény Fourier-együtthatói.

A Riemann–Lebesgue-lemma (lásd pl. [19, Vol. II, p. 301]) alapján, ha $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$\hat{f}(k,l) \to 0, \quad \text{ha} \quad \max\{|k|,|l|\} \to \infty.$$

Ez a tény alapvető fontosságú lesz tételeink bizonyítása során.

A (2.1)-ben szereplő sor nemszimmetrikus téglányösszegeit a következő módon definiáljuk:

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y) := \sum_{k=m_1}^{n_1} \sum_{l=m_2}^{n_2} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)}, \quad m_j, n_j \in \mathbb{Z}, \quad m_j \le n_j, \quad j=1,2.$$

Abban a speciális esetben, amikor $m_j = -n_j$, a rövidebb

$$S_{n_1,n_2}(f;x,y) := S_{-n_1,n_1;-n_2,n_2}(f;x,y), \quad n_j \in \mathbb{N},\ j = 1,2$$

jelölést használjuk; és ezt az összeget a (2.1)-ben szereplő kettős sor szimmetrikus téglányösszegének nevezzük.

A (2.1)-ben szereplő Fourier-sor szimmetrikus, valamint nemszimmetrikus téglányösszegeinek egy adott $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ pontbeli konvergenciájának vizsgálata során kiderül, hogy ez a konvergencia lényegében az $f(x, y_0)$, $x \in \mathbb{T}$, és $f(x_0, y)$, $y \in \mathbb{T}$ ($x := x_0$ és $y := y_0$ rögzített), úgynevezett marginális függvények egyváltozós Fourier-sora konvergenciájának viselkedésétől függ. Ezekre az egyváltozós Fourier-sorokra, valamint Fourier-együtthatóikra a következő jelöléseket használjuk:

$$f(x, y_0) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\cdot, y_0)^\wedge(k) e^{ikx}, \tag{2.2}$$

ahol

$$f(\cdot, y_0)^\wedge(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u, y_0)e^{-iku}\,\mathrm{d}u, \quad k \in \mathbb{Z};$$

és analóg módon

$$f(x_0, y) \sim \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x_0, \cdot)^\wedge(l) e^{ily}, \tag{2.3}$$

ahol

$$f(x_0, \cdot)^\wedge(l) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x_0, v)e^{-ilv}\,\mathrm{d}v, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

A kettős konjugált sorok (lásd alább) konvergenciájánál viszont a (2.2) és a (2.3) Fourier-sorok konjugált sorai játszanak fontos szerepet:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} k) f(\cdot, y_0)^\wedge(k) e^{ikx}, \tag{2.4}$$

valamint

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} l) f(x_0, \cdot)^\wedge(l) e^{ily}. \tag{2.5}$$

Konjugált sorok

Amikor az egyváltozós (1.2) konjugált sor kétváltozós megfelelőjét keressük, az egyváltozós esettől eltérően a (2.1)-beli kettős sorból többféle módon is képezhetünk konjugált sort, attól függően, hogy az első, a második vagy mindkét változóra vonatkozóan „konjugálunk". Az első változóra vonatkozó konjugált sort a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} (-i \operatorname{sign} k) \hat{f}(k, l) e^{i(kx+ly)} \tag{2.6}$$

kettős összeggel definiáljuk, a második változóra vonatkozó konjugált sor alakja:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign} l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}, \tag{2.7}$$

végül a mindkét változó szerinti konjugált sor a következő:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign} k)(-i\operatorname{sign} l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}. \tag{2.8}$$

A (2.6)–(2.8) konjugált sorok nemszimmetrikus téglányösszegeire rendre az

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y), \quad \widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y) \quad \text{és} \quad \widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y)$$

jelöléseket használjuk, a szimmetrikus téglányösszegekre pedig a következő, egyszerűbb jelöléseket alkalmazzuk:

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x,y), \quad \widetilde{S}^{(0,1)}_{n_1,n_2}(f;x,y) \quad \text{és} \quad \widetilde{S}^{(1,1)}_{n_1,n_2}(f;x,y).$$

Végül megadjuk az (1.3)-ban definiált $\varphi_x(u)$ függvény kétváltozós megfelelőjét, amelyre a $\varphi_{xy}(u,v)$ jelölést használjuk:

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(u,v) &= f(x+u,y+v)+f(x-u,y+v)+\\ &\quad +f(x+u,y-v)+f(x-u,y-v)-4f(x,y),\end{aligned} \tag{2.9}$$

ahol $(u,v)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$.

Megjegyezzük, hogy $\varphi_{xy}(\cdot,0)=2\varphi_x(f(\cdot,y))$, mivel

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(u,0) &= f(x+u,y+0)+f(x-u,y+0)+\\ &\quad +f(x+u,y-0)+f(x-u,y-0)-4f(x,y)=\\ &= 2[f(x+u,y)+f(x-u,y)-2f(x,y)]=\\ &= 2\varphi_x(f(\cdot,y);u).\end{aligned}$$

Hasonlóan bizonyítható a $\varphi_{xy}(0,\cdot)=2\varphi_y(f(x,\cdot))$ egyenlőség is.

Függvényosztályok

Most megadjuk az 1.1. részben ismertetett egyváltozós függvényosztályok kétváltozós megfelelőit. Érdekes megjegyezni, hogy a Lipschitz- és Zygmund-osztályok kiterjesztésénél, a változókra külön-külön Lipschitz-, illetve Zygmund-feltételt szabva, négyféle kiterjesztés lehetséges.

Emlékeztetünk arra, hogy Móricz vezette be a (periodikus) multiplikatív Lipschitz-osztályok [7], a (periodikus) multiplikatív Zygmund-osztályok [6], valamint a (periodikus) Lipschitz–Zigmund- és Zygmund–Lipschitz-osztályok [11] fogalmát.

Először az (1.4) és (1.5) bal oldalán az abszolútérték jelek között álló kifejezések kétdimenziós megfelelőjét adjuk meg. Ha mindkét változó szerint Lischitz-feltételt szeretnénk megkövetelni, akkor (1.4) kiterjesztéseként a következő, $\Delta_{1,1}$-gyel jelölt kifejezést kapjuk:

$$\Delta_{1,1}(f;x,y;u,v) := f(x+u,y+v) - f(x,y+v) - f(x+u,y) + f(x,y). \tag{2.10}$$

Ha mindkét változó szerint Zygmund-feltételt szeretnénk előírni, akkor (1.5) általánosításaként a $\Delta_{2,2}$-vel jelölt kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}\Delta_{2,2}(f;x,y;u,v) := {} & f(x-u,y-v) + f(x+u,y-v) + \\ & + f(x-u,y+v) + f(x+u,y+v) - \\ & - 2f(x-u,y) - 2f(x+u,y) - \\ & - 2f(x,y-v) - 2f(x,y+v) + 4f(x,y).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Az (1.7) bal oldalán álló számlálónak megfelelően a módosított $\Delta_{2,2}(f;x,y;u,v;A)$ jelölést abban az általánosabb értelemben fogjuk használni, amikor a (2.11) jobb oldalán $f(x,y)$-t az A konstanssal helyettesítjük.

Végül megtehetjük azt is, hogy az egyik változó szerint Lipschitz-, a másik változó szerint pedig Zygmund-feltételt írunk elő. Ezekben az esetekben a következő kifejezéseket fogjuk használni (1.4) és (1.5) általánosításaként:

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2}(f;x,y;u,v) := {} & f(x-u,y-v) + f(x-u,y+v) - 2f(x-u,y) - \\ & - f(x+u,y-v) - f(x+u,y+v) + 2f(x+u,y),\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}\Delta_{2,1}(f;x,y;u,v) := {} & f(x-u,y-v) + f(x+u,y-v) - 2f(x,y-v) - \\ & - f(x-u,y+v) - f(x+u,y+v) + 2f(x,y+v).\end{aligned}$$

Ezen előkészületek után rátérhetünk a függvényosztályok definiálására.

2.1.1. Definíció (Multiplikatív Lipschitz-osztály). *Egy mindkét változójában periodikus, folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik a multiplikatív* $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ *($\alpha,\beta > 0$) Lipschitz-osztályba, ha létezik egy $C = C(f)$ állandó úgy, hogy*

$$|\Delta_{1,1}(f;x,y;u,v)| \le C|u|^\alpha|v|^\beta \quad \textit{minden} \quad (x,y)\textit{-ra és } (u,v)\textit{-re.}$$

2.1.2. Definíció (Multiplikatív Zygmund-osztály). *Egy mindkét változójában periodikus, folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik a multiplikatív* $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ *($\alpha,\beta > 0$) Zygmund-osztályba, ha létezik egy $C = C(f)$ konstans úgy, hogy*

$$|\Delta_{2,2}(f;x,y;u,v)| \le C|u|^\alpha|v|^\beta \quad \textit{minden} \quad (x,y) \textit{ és } (u,v) \textit{ esetén.}$$

2.1.3. Definíció (Multiplikatív Lipschitz–Zygmund-osztály). *Egy mindkét változójában periodikus, folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik a multiplikatív* $\mathrm{LZ}(\alpha,\beta)$ *($\alpha,\beta>0$) Lipschitz–Zygmund-osztályba, ha létezik egy $C=C(f)$ konstans úgy, hogy*

$$|\Delta_{1,2}(f;x,y;u,v)| \le C|u|^\alpha|v|^\beta \quad \textit{minden} \quad (x,y) \textit{ és } (u,v) \textit{ esetén.}$$

2.1.4. Definíció (Multiplikatív Zygmund–Lipschitz-osztály). *Egy mindkét változójában periodikus, folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik a multiplikatív* $\mathrm{ZL}(\alpha,\beta)$ *($\alpha,\beta>0$) Zygmund–Lipschitz-osztályba, ha létezik egy $C=C(f)$ konstans úgy, hogy*

$$|\Delta_{2,1}(f;x,y;u,v)| \le C|u|^\alpha|v|^\beta \quad \textit{minden} \quad (x,y) \textit{ és } (u,v) \textit{ esetén.}$$

Megjegyezzük, hogy a multiplikatív Lipschitz/Zygmund-osztályok definícióját, valamint a $\Delta_{p_1,p_2}(f;x,y;u,v)$ jelölést ($p_j\in\{1,2\}$, $j=1,2$) a következő egyszerű tények motiválták. Abban a speciális esetben, amikor $f(x,y)=g(x)h(y)$, akkor a $\Delta_{p_1,p_2}(f;x,y;u,v)$ mennyiségeket a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,1}(f;x,y;u,v) &= [g(x+u)-g(x)][h(y+v)-h(y)],\\
\Delta_{1,2}(f;x,y;u,v) &= [g(x-u)-g(x+u)][h(y-v)+h(y+v)-2h(y)],\\
\Delta_{2,1}(f;x,y;u,v) &= [g(x-u)+g(x+u)-2g(x)][h(y-v)-h(y+v)],\\
\Delta_{2,2}(f;x,y;u,v) &= [g(x-u)+g(x+u)-2g(x)][h(y-v)+h(y+v)-2h(y)].
\end{aligned}$$

Ezekből pedig nyilvánvalóan következik, hogy ha $g\in\mathrm{Lip}(\alpha)$ és $h\in\mathrm{Lip}(\beta)$, akkor $f\in\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$; ha $g\in\mathrm{Lip}(\alpha)$ és $h\in\mathrm{Zyg}(\beta)$, akkor $f\in\mathrm{LZ}(\alpha,\beta)$, stb.

Megvizsgálva a $\Delta_{p_1,p_2}(f;x,y;u,v)$ mennyiségeket, a tagok alkalmas csoportosításával a következő összefüggéseket fedezhetjük fel. Minden (x,y)-ra és (u,v)-re igazak a következők:

$$\begin{aligned}
\Delta_{2,2}(f;x,y;u,v) &= [f(x+u,y+v)-f(x,y+v)-f(x+u,y)+f(x,y)]-\\
&\quad -[f(x,y+v)-f(x-u,y+v)-f(x,y)+f(x-u,y)]-\\
&\quad -[f(x+u,y)-f(x,y)-f(x+u,y-v)+f(x,y-v)]+\\
&\quad +[f(x,y)-f(x-u,y)-f(x,y-v)+f(x-u,y-v)]=\\
&= \Delta_{1,1}(f;x,y;u,v)-\Delta_{1,1}(f;x-u,y;u,v)-\\
&\quad -\Delta_{1,1}(f;x,y-v;u,v)+\Delta_{1,1}(f;x-u,y-v;u,v),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

valamint

$$\begin{aligned}\Delta_{2,2}(f;x,y;u,v) &= [f(x-u,y-v)+f(x-u,y+v)-2f(x-u,y)-\\ &\qquad -f(x,y-v)-f(x,y+v)+2f(x,y)]-\\ &\quad -[f(x,y-v)+f(x,y+v)-2f(x,y)-\\ &\qquad -f(x+u,y-v)-f(x+u,y+v)+2f(x+u,y)]=\\ &= \Delta_{1,2}\left(f;x-\frac{u}{2},y;\frac{u}{2},v\right)-\Delta_{1,2}\left(f;x+\frac{u}{2},y;\frac{u}{2},v\right),\end{aligned}$$

hasonlóan

$$\Delta_{2,2}(f;x,y;u,v)=\Delta_{2,1}\left(f;x,y-\frac{v}{2};u,\frac{v}{2}\right)-\Delta_{2,1}\left(f;x,y+\frac{v}{2};u,\frac{v}{2}\right),$$

végül

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2}(f;x,y;u,v) &= [f(x+u,y)-f(x-u,y)-f(x+u,y-v)+f(x-u,y-v)]-\\ &\quad -[f(x+u,y+v)-f(x-u,y+v)-f(x+u,y)+f(x-u,y)]=\\ &= \Delta_{1,1}(f;x-u,y-v;2u,v)-\Delta_{1,1}(f;x-u,y;2u,v),\end{aligned}$$

illetve analóg módon

$$\Delta_{2,1}(f;x,y;u,v)=\Delta_{1,1}(f;x-u,y-v;u,2v)-\Delta_{1,1}(f;x,y-v;u,2v).$$

Ezen összefüggések felhasználásával az alábbi, tetszőleges $\alpha,\beta>0$ esetén érvényes relációkat nyerjük:

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)\subseteq \mathrm{LZ}(\alpha,\beta)\subseteq \mathrm{Zyg}(\alpha,\beta),\\ \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)\subseteq \mathrm{ZL}(\alpha,\beta)\subseteq \mathrm{Zyg}(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Végül megvizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor az f_x és $(f_x)_y$ parciális deriváltak valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$ pont környezetében léteznek, és $(f_x)_y$ korlátos is itt. Ekkor ebben a környezetben

$$\Delta_{p_1,p_2}(f;x_0,y_0;u,v)=O(uv),\quad p_j\in\{1,2\},\ j=1,2. \tag{2.13}$$

Valóban, ez az állítás közvetlenül igazolható a klasszikus középértéktétel alkalmazásával. Például, tekintsük a $p_1=1$ és $p_2=2$ esetet. Bevezetve az

$$e(w):=f(w,y_0-v)+f(w,y_0+v)-2f(w,y_0)$$

jelölést az állításban szereplő (x_0,y_0) pont környezetében, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v) &= e(x_0-u)-e(x_0+u)=-2ue'(\xi)=\\ &= (-2u)[f_x(\xi,y_0-v)+f_x(\xi,y_0+v)-2f_x(\xi,y_0)]=\\ &= (-2u)[(f_x)_y(\xi,\eta_1)(-v)+(f_x)_y(\xi,\eta_2)v]=O(uv),\end{aligned}$$

ahol $(\xi, y_0 - v)$, $(\xi, y_0 + v)$, (ξ, y_0), (ξ, η_1), és (ξ, η_2) a fenti állításban adott környezet megfelelő pontjai.

Így (2.13) alapján, ha az f_x, $(f_x)_y$ parciális deriváltak léteznek, és ez utóbbi korlátos az egész kétdimenziós $\mathbb{T}^2$ tóruszon, akkor f eleme a $\mathrm{Lip}(1,1)$, $\mathrm{LZ}(1,1)$, $\mathrm{ZL}(1,1)$ és $\mathrm{Zyg}(1,1)$ függvényosztályok mindegyikének.

Most a Lipschitz/Zygmund-osztályok bevezetése és vizsgálata után a korlátos változású függvények kétváltozós kiterjesztésével folytatjuk.

2.1.5. Definíció (Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvény). *Az $f(x, y)$ függvényt korlátos változásúnak nevezzük az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon Hardy–Krause értelemben, ha a következő három feltétel teljesül (ld. [8] és [9, Section 254]).*

1. *Az $f(x, y)$ függvény $V(f; [a, b] \times [c, d])$ teljes változása az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon véges. Ezt a teljes változást a következő szuprémummal definiáljuk:*

$$\sup \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_{j-1}, y_{k-1}) - f(x_j, y_{k-1}) - f(x_{j-1}, y_k) + f(x_j, y_k) \right|,$$

amelyet az $[a, b]$ és $[c, d]$ intervallumok minden

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \quad \text{és} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

beosztására kiterjesztünk.

2. *Az $f(\cdot, c)$ marginális függvény, mint az első változó függvénye, korlátos változású az $[a, b]$ intervallumon.*

3. *Az $f(a, \cdot)$ marginális függvény, mint a második változó függvénye, korlátos változású a $[c, d]$ intervallumon.*

Megjegyezzük, hogy ha csak az első feltétel teljesül, akkor az $f(x, y)$ függvényt Vitali értelemben nevezzük korlátos változásúnak (lásd [4]).

Az egyváltozós esethez hasonlóan, ha az $f(x, y)$ függvény korlátos változású az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon Hardy–Krause értelemben, akkor az úgynevezett kvadrantikus határérték:

$$f(x_0 - 0, y_0 - 0) := \lim_{\substack{x \uparrow x_0 \\ y \uparrow y_0}} f(x, y)$$

létezik minden $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$ pontban (lásd [15, 3. Tétel]). Ezen kívül $f(x_0 - 0, y_0 - 0)$ megkapható mint iterációs határérték, azaz

$$f(x_0 - 0, y_0 - 0) = \lim_{y \uparrow y_0} f(x_0 - 0, y) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x, y_0 - 0),$$

ahol

$$f(x_0-0,y):=\lim_{x\uparrow x_0} f(x,y)$$

és $f(x,y_0-0)$ hasonlóan definiált.

A három másik kvadrantikus határérték:

$$f(x_0-0,y_0+0):=\lim_{\substack{x\uparrow x_0\\ y\downarrow y_0}} f(x,y),$$

$f(x_0+0,y_0-0)$ és $f(x_0+0,y_0+0)$ szintén létezik. Valamint ezek is kiszámíthatóak iterációs határértékként:

$$f(x_0-0,y_0+0)=\lim_{y\downarrow y_0} f(x_0-0,y)=\lim_{x\uparrow x_0} f(x,y_0+0),$$

ahol

$$f(x,y_0+0):=\lim_{y\downarrow y_0} f(x,y), \quad \text{stb.}$$

Mivel azok a pontok, ahol az $f(x,y)$ Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvény nem folytonos, megszámlálható sok, a koordináta tengelyekkel párhuzamos egyeneseken helyezkednek el (lásd pl. [1]), ezért a továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy az ilyen f függvényre igaz az

$$f(x,y)=\frac{1}{4}\left\{f(x+0,y+0)+f(x-0,y+0)+f(x+0,y-0)+f(x-0,y-0)\right\}$$

egyenlőség minden (x,y) pontban.

2.2. Dini konvergencia-kritériumának kétváltozós kiterjesztése

Első tételünkben [10, 1. Tétel] elegendő feltételt adunk a (2.1)-beli Fourier-sor szimmetrikus téglányösszegeinek adott pontbeli konvergenciájára.

2.2.1. Tétel. *Legyen $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$, $A,A_1,A_2\in\mathbb{C}$, és valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{2,2}(f;x_0,y_0;u,v;A_1+A_2-A)\in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{2.14}$$

Ha a (2.2)-ben és a (2.3)-ban szereplő egyváltozós Fourier-sorok szimmetrikus részletösszegei A_1-hez és A_2-höz kovergálnak az $x:=x_0$, illetve az $y:=y_0$ pontokban, akkor

$$S_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)\to A, \quad \textit{ha} \quad n_j\to\infty,\ j=1,2. \tag{2.15}$$

Fordítva, ha (2.15) teljesül, és ha a (2.2)-ben és a (2.3)-ban szereplő Fourier-sorok egyikének szimmetrikus részletösszegei konvergensek, akkor a másik Fourier-sor szimmetrikus részletösszegei is konvergensek.

Az 1.2.1. Tételbeli (i) állítást a 2.2.1. Tétellel kombinálva abban a speciális esetben, amikor $A = A_1 = A_2 := f(x_0, y_0)$, kapjuk az alábbi következményt [10, 1. Korollárium].

2.2.1. Korollárium. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $f(\cdot, y_0) \in L^1(\mathbb{T})$ és $f(x_0, \cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re. Ha*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{2,2}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{2.16}$$

$$u^{-1}[f(x_0 - u, y_0) + f(x_0 + u, y_0) - 2f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

és

$$v^{-1}[f(x_0, y_0 - v) + f(x_0, y_0 + v) - 2f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor

$$S_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(x_0, y_0), \quad \text{ha} \quad n_j \to \infty,\ j = 1, 2. \tag{2.17}$$

Második tételünkben [10, 2. Tétel] a (2.1)-beli Fourier-sor nemszimmetrikus téglányösszegeinek adott pontbeli konvergenciájára adunk elégséges feltételt.

2.2.2. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ és valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{2.18}$$

Ha a (2.2)-beli és a (2.3)-beli egyváltozós Fourier-sorok nemszimmetrikus részletösszegei $f(x_0, y_0)$-hoz konvergálnak, akkor

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(x_0, y_0), \quad \text{ha} \quad m_j \to -\infty \text{ és } n_j \to \infty,\ j = 1, 2. \tag{2.19}$$

Fordítva, ha (2.19) teljesül, és ha a (2.2)-beli és a (2.3)-beli Fourier-sorok egyikének nemszimmetrikus részletösszegei $f(x_0, y_0)$-hoz konvergálnak, akkor a másik Fourier-sor nemszimmetrikus részletösszegei is ehhez konvergálnak.

Ha az 1.2.1. Tétel (ii) állítását kombináljuk a 2.2.2. Tétellel, akkor az alábbi következményhez [10, 2. Korollárium] jutunk.

2.2.2. Korollárium. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $f(\cdot, y_0) \in L^1(\mathbb{T})$ és $f(x_0, \cdot) \in L^1(\mathbb{T})$ valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re. Ha a (2.18) feltétel, valamint az alábbi két kiegészítő feltétel fennáll:*

$$u^{-1}[f(u, y_0) - f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}) \quad \text{és} \quad v^{-1}[f(x_0, v) - f(x_0, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor (2.19) is teljesül.

Ha a (2.16) és a (2.18) feltételeknek a függvényosztályokkal való viszonyát vizsgáljuk, akkor nyilvánvaló, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{T}^2) \cap \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$ esetén, akkor a (2.16) feltétel teljesül minden (x_0, y_0) pontban. Hasonlóan, ha $f \in L^1(\mathbb{T}^2) \cap \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$ esetén, akkor a (2.18) feltétel minden (x_0, y_0) pontban teljesül.

Valamint a (2.12) összefüggés felhasználásával nyerjük, hogy a (2.18) feltétel fennállása maga után vonja (2.16) teljesülését is; így nyilvánvaló, hogy a (2.17) következtetés gyengébb, mint (2.19).

Végül utalva a 2.13-nál leírtakra, ha az $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ pontnak létezik olyan környezete, hogy az f_x és $(f_x)_y$ parciális deriváltak léteznek ezen környezet minden pontjában és $(f_x)_y$ korlátos itt, akkor $f \in \mathrm{Lip}(1, 1)$. Ebből pedig következik, hogy ilyen f függvényre a (2.18) feltétel is teljesül.

2.3. Pringsheim konvergencia-kritériumának kétváltozós kiterjesztése

Első tételünkben [11, 1. Tétel] a (2.6) konjugált sor szimmetrikus téglányösszegeinek konvergenciájára adunk szükséges és elegendő feltételt.

2.3.1. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Ha valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,2}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{2.20}$$

akkor az

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0)$$

szimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén, ha a (2.4) konjugált sor szimmetrikus részletösszegei konvergensek az $x := x_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.

A 2.3.1. Tételnek a (2.7) konjugált sorra vonatkozó szimmetrikus megfelelője a következőképpen hangzik [11, 2. Tétel].

2.3.2. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Ha valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{2,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{2.21}$$

akkor az

$$\widetilde{S}^{(0,1)}_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0)$$

szimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén, ha a (2.5) konjugált sor szimmetrikus részletösszegei kovergensek az $y := y_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.

Erősebb feltételt megadva, a (2.6)–(2.8) konjugált sorok nemszimmetrikus téglányösszegeinek konvergenciájára is következtethetünk [11, 3. Tétel].

2.3.3. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, és tegyük fel, hogy valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{2.22}$$

(i) *Az*

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$$

nemszimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén, ha a (2.4) konjugált sor nemszimmetrikus részletösszegei konvergensek az $x := x_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.

(ii) *Az*

$$\widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$$

nemszimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén, ha a (2.5) konjugált sor nemszimmetrikus részletösszegei konvergensek az $y := y_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.

(iii) *Az*

$$\widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$$

nemszimmetrikus téglányösszegeknek létezik határértéke $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ esetén.

Ha a tételekben szereplő feltételeknek a függvényosztályokkal való kapcsolatát vizsgáljuk, adódik, hogy a 2.3.1. Tételben szerpelő (2.20) feltétel biztosan teljesül minden $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ pontban, ha $f \in \mathrm{LZ}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$-ra; a 2.3.2. Tételben lévő (2.21) feltétel teljesül minden $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$ pontban, ha $f \in \mathrm{ZL}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$-ra; és a 2.3.3. Tételben szereplő (2.22) feltétel teljesül, ha $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ valamely $\alpha, \beta > 0$-ra.

Ha a fenti 2.3.1–2.3.3. Tételeket kombináljuk az egyváltozós függvényekre érvényes az 1.2.2. Tétellel, akkor a következő korolláriumokat [11, 1-3. Korollárium] kapjuk.

2.3.1. Korollárium. *Tegyük fel, hogy $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ és a (2.20) feltétel valamely $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$-re teljesül. Ha $f(\cdot, y_0) \in L^1(\mathbb{T})$ és*

$$u^{-1}[f(x_0 + u, y_0) - f(x_0 - u, y_0)] \in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)\to f(\cdot,y_0)^{\sim}(x_0),\quad \textit{ha}\quad n_j\to\infty,\ j=1,2.$$

2.3.2. Korollárium. *Tegyük fel, hogy $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$ és a (2.21) feltétel valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re teljesül. Ha $f(x_0,\cdot)\in L^1(\mathbb{T})$ és*

$$v^{-1}[f(x_0,y_0+v)-f(x_0,y_0-v)]\in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor

$$\widetilde{S}^{(0,1)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)\to f(x_0,\cdot)^{\sim}(y_0),\quad \textit{ha}\quad n_j\to\infty,\ j=1,2.$$

Probléma. Nem találtunk olyan, a $\Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v)$, a $\Delta_{2,1}(f;x_0,y_0;u,v)$ és a $\Delta_{2,2}(f;x_0,y_0;u,v)$ segítségével, valamint az $f(\cdot,y_0)$ és az $f(x_0,\cdot)$ marginális függvények egyváltozós Fourier-sorainak konjugált sorával kifejezhető, a (2.22)-nél gyengébb elegendő feltételt, amely bizosítaná a (2.8) kettős konjugált sor szimmetrikus téglányösszegeinek konvergenciáját egy adott $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$ pontban.

2.3.3. Korollárium. *Tegyük fel, hogy $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$ és a (2.22) feltétel valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re teljesül.*

(i) *Ha $f(\cdot,y_0)\in L^1(\mathbb{T})$ és*

$$u^{-1}[f(x_0+u,y_0)-f(x_0,y_0)]\in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0)\to f(\cdot,y_0)^{\sim}(x_0),\quad \textit{ha}\quad m_j\to-\infty\quad \textit{és}\quad n_j\to\infty,\ j=1,2.$$

(ii) *Ha $f(x_0,\cdot)\in L^1(\mathbb{T})$ és*

$$v^{-1}[f(x_0,y_0+v)-f(x_0,y_0)]\in L^1(\mathbb{T}),$$

akkor

$$\widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0)\to f(x_0,\cdot)^{\sim}(y_0),\quad \textit{ha}\quad m_j\to-\infty\quad \textit{és}\quad n_j\to\infty,\ j=1,2.$$

2.4. Telyakovskii tételének kétváltozós kiterjesztése

Telyakovskii tételének kiterjesztésekor az (1.16) egyenlőtlenséget fogjuk általánosítani kétváltozós függvényekre. Itt attól függően, hogy a kettős szummában mindkét vagy csak az egyik összegezési index szerint adunk össze végtelen sok tagot, az alábbi tételben [12, 3. Tétel] szereplő három egyenlőtlenséget kaphatjuk.

2.4.1. Tétel. *Legyenek* $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ *és* $n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_q < \dots$ *a természetes számoknak olyan sorozatai, amelyek kielégítik a*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \leq \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1, 2, \dots \tag{2.23}$$

és a

$$\sum_{q=q_0}^{\infty} \frac{1}{n_q} \leq \frac{B}{n_{q_0}}, \quad q_0 = 1, 2, \dots \tag{2.24}$$

feltételeket, ahol $A, B > 1$ *állandók. Ha az* f *függvény korlátos változású Hardy–Krause értelemben, akkor minden* p_0, q_0 *esetén és minden* (x, y) *pontban igazak a következő becslések:*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{m_p \leq m \leq M < m_{p+1}} \max_{n_q \leq n \leq N < n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \leq$$
$$\leq \frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right), \tag{2.25}$$

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \leq m \leq M < m_{p+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \leq$$
$$\leq \frac{(\pi+4)A}{m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x(f(\cdot,y)), \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) +$$
$$+ \frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right) \tag{2.26}$$

és

$$\sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{n_q \leq n \leq N < n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=0}^{m_{p_0}-1} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \leq$$
$$\leq \frac{(\pi+4)B}{n_{q_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)), \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right) +$$
$$+ \frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right), \tag{2.27}$$

ahol A *és* B *a (2.23) és a (2.24) becslésekbeli konstansok.*

A 2.4.1. Tételből közvetlenül adódik a következő állítás [12, Következmény].

2.4.1. Korollárium. *Ha a mindkét változója szerint 2π-periodikus $f(x,y)$ függvény korlátos változású a $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ téglalapon, akkor minden $m,n\geq 0$ esetén*

$$\begin{aligned}|S_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)|\leq{}& \frac{C_1A}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}V\left(\varphi_x(f(\cdot,y)),\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right)+\\ &+\frac{C_2B}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)),\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right)+\\ &+\frac{C_3AB}{(m+1)(n+1)}\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{l=1}^{n+1}V\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right).\end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy a 2.4.1. Tétel erősebb, mint ez a korollárium. Megjegyezzük, hogy Móricz [13, 3. Tétel] más módszerek felhasználásával szintén bizonyította a korolláriumban szereplő egyenlőtlenséget, a konstansokat is megadva: $C_1=C_2=2(1+1/\pi)$ és $C_3=4(1+2/\pi+1/\pi^2)$.

Megjegyezzük még, hogy a 2.4.1. Korollárium tulajdonképpen Bojanić tételének (1.2.3. Tétel) kiterjesztése kétváltozós, Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvényekre.

Végül utalunk arra, hogy Hardy tétele [8], amely a Dirichlet–Jordan-tételnek (lásd pl. [19, Vol. I, p. 57]) a kiterjesztése kétváltozós, Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvényekre, megkapható a fenti következményből.

2.4.2. Tétel (Hardy). *Ha a mindkét változója szerint 2π-periodikus $f(x,y)$ függvény korlátos változású a $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ téglalapon, akkor Fourier-sora minden (x,y) pontban az $f(x,y)$ értékhez konvergál.*

3. fejezet

Új eredmények bizonyítása

Ebben a részben a 2. fejezetben ismertett tételek bizonyításait közöljük. A Dini típusú, valamint a Pringsheim típusú tételek bizonyításánál a Fourier-, valamint a konjugált sorok téglányösszegeinek Dirichlet-, illetve konjugált Diriclet-magfüggvények segítségével történő előállításából indulunk. Majd felhasználva a kétváltozós Riemann–Lebesgue-lemmát, bizonyítjuk tételeinket. Ezután ismertetünk és bizonyítunk néhány, a Telyakovskii típusú tétel bizonyításához szükséges segédtételt. Végül bizonyítjuk Telyakovskii tételének kétváltozós megfelelőjét.

3.1. Dini típusú tételek bizonyítása

A 2.2.1. Tétel bizonyítása

Az S_{n_1,n_2} szimmetrikus téglányösszeg következő, jól ismert előállításából (lásd pl. [19, Vol. II, p. 302]) indulunk ki:

$$S_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0) = \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2} f(x_0-u,y_0-v)D_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

ahol $D_n(u)$ a Dirichlet-magfüggvény. Mivel $D_n(u)$ páros, adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&S_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0) - A = \\
&\quad = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}[f(x_0-u,y_0-v)+f(x_0+u,y_0-v)+f(x_0-u,y_0+v)+ \\
&\quad\quad +f(x_0+u,y_0+v)-4A]D_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Felhasználva $\Delta_{2,2}$ (2.11)-beli definícióját az $x := x_0$, $y := y_0$ esetben azzal a módosítással, hogy $f(x,y)$ helyén (A_1+A_2-A) áll, kapjuk a következőt:

$$
\begin{aligned}
&S_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)-A=\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}\Delta_{2,2}(f;x_0,y_0;u,v;A_1+A_2-A)D_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}[f(x_0-u,y_0)+f(x_0+u,y_0)-2A_1]D_{n_1}(u)\,\mathrm{d}u+\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}[f(x_0,y_0-v)+f(x_0,y_0+v)-2A_2]D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Figyelembe véve (1.9)-et, az előző kifejezést a következő alakban írhatjuk fel:

$$
\begin{aligned}
(3.1)\ &S_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)-A=\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}\Delta_{2,2}(f;x_0,y_0;u,v;A_1+A_2-A)D_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\\
&+\left[\sum_{k=-n_1}^{n_1}f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx_0}-A_1\right]+\left[\sum_{l=-n_2}^{n_2}f(x_0,\cdot)^\wedge(l)e^{ily_0}-A_2\right].
\end{aligned}
$$

Ebből az alakból már látszik, hogy a 2.2.1. Tétel bizonyításához elegendő azt megmutatnunk, hogy a (3.1) jobb oldalán álló kettős integrál nullához konvergál, ha $n_j\to\infty$, $j=1,2$. Hogy ezt belássuk, vezessük be a következőképpen definiált g segédfüggvényt:

$$
g(u,v):=(e^{iu}-1)^{-1}(e^{iv}-1)^{-1}\Delta_{2,2}(f;x_0,y_0;u,v;A_1+A_2-A),\quad u\neq 0,\ v\neq 0.
$$

A (2.14) feltétel következtében kapjuk, hogy $g\in L^1(\mathbb{T}^2)$. Ebből pedig következik, hogy

$$
\begin{aligned}
(3.2)\ I_{n_1,n_2}:=&\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}\Delta_{2,2}(f;x_0,y_0;u,v;A_1+A_2-A)D_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\\
=&\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}g(u,v)(e^{iu}-1)(e^{iv}-1)D_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Könnyű belátni, hogy

$$
(e^{iu}-1)D_{n_1}(u)=e^{i(n_1+1)u}-e^{-in_1u}.
$$

Ezen észrevétel alapján (3.2)-ből nyerjük, hogy

$$
\begin{aligned}
I_{n_1,n_2}&=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}g(u,v)[e^{i(n_1+1)u}-e^{-in_1u}][e^{i(n_2+1)v}-e^{-in_2v}]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\\
&=\hat{g}(-n_1-1,-n_2-1)-\hat{g}(n_1,-n_2-1)-\hat{g}(-n_1-1,n_2)+\hat{g}(n_1,n_2).
\end{aligned}
$$

Mivel $g\in L^1(\mathbb{T}^2)$, így a kétváltozós Riemann–Lebesgue-lemma szerint adódik, hogy

$$
I_{n_1,n_2}\to 0,\quad \text{ha}\quad n_j\to\infty,\ j=1,2. \tag{3.3}
$$

Ezzel a fenti állítást igazoltunk.

Most már, összevetve (3.1)-et, (3.2)-t és (3.3)-at, adódik, hogy a 2.2.1. Tétel bizonyítása teljes.

A 2.2.2. Tétel bizonyítása

A tétel bizonyítását egy segédfüggvény bevezetésével kezdjük. Végezzük el (2.10)-ben az $x := x_0 + u$ és $y := y_0 + v$ helyettesítést. A rövidség kedvéért jelöljük ezt $F(x, y)$-nal, azaz

$$\Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0) =: F(x, y). \tag{3.4}$$

Majd vezessünk be egy további segédfüggvényt; nevezetesen, legyen

$$g(x, y) := (e^{i(x-x_0)} - 1)^{-1}(e^{i(y-y_0)} - 1)^{-1} F(x, y).$$

A (2.18) feltétel szerint, (3.4)-et is figyelembe véve, adódik, hogy $g \in L^1(\mathbb{T}^2)$. Valamint nyilvánvaló, hogy

$$F(x, y) = (e^{i(x-x_0)} - 1)(e^{i(y-y_0)} - 1) g(x, y). \tag{3.5}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy F Fourier-együtthatóit minden $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$-re a következőképpen írhatjuk fel:

(3.6)

$$\hat{F}(k, l) = \begin{cases} \hat{f}(k, l), & \text{ha } k \neq 0 \text{ és } l \neq 0, \\ \hat{f}(k, 0) - f(\cdot, y_0)^\wedge(k), & \text{ha } k \neq 0 \text{ és } l = 0, \\ \hat{f}(0, l) - f(x_0, \cdot)^\wedge(l), & \text{ha } k = 0 \text{ és } l \neq 0, \\ \hat{f}(0, 0) - f(\cdot, y_0)^\wedge(0) - f(x_0, \cdot)^\wedge(0) + f(x_0, y_0), & \text{ha } k = 0 \text{ és } l = 0. \end{cases}$$

Legyen $m_j, n_j \in \mathbb{Z}$, $m_j < 0 < n_j$ $(j = 1, 2)$. Ekkor a (3.4) jobb oldalán definiált F függvény kettős Fourier-sorának nemszimmetrikus téglányösszegei az (x_0, y_0) pontban (3.6) alapján a következő alakban írhatóak:

$$\begin{aligned} S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F; x_0, y_0) &= S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) - \\ &- \sum_{k=m_1}^{n_1} f(\cdot, y_0)^\wedge(k) e^{ikx_0} - \sum_{l=m_2}^{n_2} f(x_0, \cdot)^\wedge(l) e^{ily_0} + f(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ebből már látszik, hogy a 2.2.2. Tétel bizonyításához elegendő azt megmutatnunk, hogy a (3.7) bal oldala nullához konvergál, miközben $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$. Ehhez először fejezzük ki az F függvény Fourier-együtthatóit g Fourier-együtthatóinak segítségével a következőképpen (vö. (3.5)):

$$\begin{aligned} \hat{F}(k, l) &:= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} g(x, y)(e^{i(x-x_0)} - 1)(e^{i(y-y_0)} - 1) e^{-i(kx+ly)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\ &= e^{-i(x_0+y_0)} \hat{g}(k-1, l-1) - e^{-ix_0} \hat{g}(k-1, l) - e^{-iy_0} \hat{g}(k, l-1) + \hat{g}(k, l), \\ &\quad (k, l) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Az F függvény Fourier-sorának téglányösszegében végrehajtva a kettős Abel-átrendezést, nyerjük, hogy

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F;x_0,y_0) := \sum_{k=m_1}^{n_1}\sum_{l=m_2}^{n_2}\hat{F}(k,l)e^{i(kx_0+ly_0)} =$$

$$= \sum_{k=m_1}^{n_1}\sum_{l=m_2}^{n_2}\big\{e^{i[(k-1)x_0+(l-1)y_0]}\hat{g}(k-1,l-1)-$$

$$-e^{i[kx_0+(l-1)y_0]}\hat{g}(k,l-1)-e^{i[(k-1)x_0+ly_0]}\hat{g}(k-1,l)+e^{i(kx_0+ly_0)}\hat{g}(k,l)\big\} =$$

$$= \left\{\sum_{k=m_1-1}^{n_1-1}\sum_{l=m_2-1}^{n_2-1} - \sum_{k=m_1}^{n_1}\sum_{l=m_2-1}^{n_2-1} - \sum_{k=m_1-1}^{n_1-1}\sum_{l=m_2}^{n_2} + \sum_{k=m_1}^{n_1}\sum_{l=m_2}^{n_2}\right\}e^{i(kx_0+ly_0)}\hat{g}(k,l) =$$

$$= e^{i[(m_1-1)x_0+(m_2-1)y_0]}\hat{g}(m_1-1,m_2-1)-e^{i[n_1x_0+(m_2-1)y_0]}\hat{g}(n_1,m_2-1)-$$

$$-e^{i[(m_1-1)x_0+n_2y_0]}\hat{g}(m_1-1,n_2)+e^{i(n_1x_0+n_2y_0)}\hat{g}(n_1,n_2).$$

Ebből pedig, mivel $g \in L^1(\mathbb{T}^2)$, a Riemann–Lebesgue-lemma alapján adódik, hogy

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F;x_0,y_0) \to 0, \quad \text{ha} \quad m_j \to -\infty \text{ és } n_j \to \infty,\ j=1,2; \tag{3.8}$$

ahogyan azt fentebb állítottuk.

Most összehasonlítva (3.7)-et és (3.8)-at, adódik, hogy a 2.2.2. Tétel bizonyítása teljes.

3.2. Pringsheim típusú tételek bizonyítása

A 2.3.1. Tétel bizonyítása

A tétel bizonyítását az első változó szerinti konjugált sor téglányösszegeinek következő, jól ismert előállításának felírásával kezdjük:

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0) = \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2} f(x_0-y,y_0-v)\widetilde{D}_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}[f(x_0-u,y_0-v)+f(x_0-u,y_0+v)-$$

$$-f(x_0+u,y_0-v)-f(x_0+u,y_0+v)]\widetilde{D}_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

ahol $(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$. Ezt $\Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v)$ definíciója, valamint az (1.13) előállítás alapján a következő alakban is írhatjuk:

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0) =$$

$$= \widetilde{I}^{(1,0)}_{n_1,n_2} + \frac{1}{2\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}[f(x_0-u,y_0)-f(x_0+u,y_0)]\widetilde{D}_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \tag{3.9}$$

$$= \widetilde{I}^{(1,0)}_{n_1,n_2} + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}[f(x_0-u,y_0)-f(x_0+u,y_0)]\widetilde{D}_{n_1}(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \widetilde{I}^{(1,0)}_{n_1,n_2} + \sum_{k=-n_1}^{n_1}(-i\ \operatorname{sign} k)f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx_0},$$

ahol

$$\widetilde{I}^{(1,0)}_{n_1,n_2} := \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2} \Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v)\widetilde{D}_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{3.10}$$

Most vezessük be a g segédfüggvényt:

$$g(u,v) := (e^{iu}-1)^{-1}(e^{iv}-1)^{-1}\,\Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v), \quad u \neq 0,\ v \neq 0.$$

A (2.20) feltételből következik, hogy $g \in L^1(\mathbb{T}^2)$; valamint (3.10) alapján nyilvánvaló, hogy

$$\widetilde{I}^{(1,0)}_{n_1,n_2} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}_2} g(u,v)(e^{iu}-1)(e^{iv}-1)\widetilde{D}_{n_1}(u)D_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{3.11}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy

$$\begin{aligned} (e^{iu}-1)(e^{iv}-1)\widetilde{D}_{n_1}(u)D_{n_2}(v) &= \\ &= \frac{1}{4i}(e^{iu}-1)\left\{\sum_{k=1}^{n_1} - \sum_{k=-n_1}^{-1}\right\} e^{iku}(e^{iv}-1)\sum_{l=-n_2}^{n_2} e^{ilv} \\ &= \frac{1}{4i}[e^{i(n_1+1)u} - e^{iu} - 1 + e^{-in_1u}][e^{i(n_2+1)v} - e^{-in_2v}]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

(3.11)-et és (3.12)-t összevetve, majd a Riemann–Lebesgue-lemmát alkalmazva, adódik, hogy

$$\begin{aligned} \widetilde{I}^{(1,0)}_{n_1,n_2} = \frac{1}{4i}[&\hat{g}(-n_1-1,-n_2-1) - \hat{g}(-n_1-1,n_2) - \\ &-\hat{g}(-1,-n_2-1) + \hat{g}(-1,n_2) - \\ &-\hat{g}(0,-n_2-1) + \hat{g}(0,n_2) + \\ &+\hat{g}(n_1,-n_2-1) - \hat{g}(n_1,n_2)] \to 0, \quad \text{ha} \quad n_j \to \infty,\ j=1,2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Most már (3.9)-ből és (3.13)-ból következik a 2.3.1. Tétel konklúziójában szereplő állítások ekvivalenciája. Ezzel a 2.3.1. Tételt bebizonyítottuk.

A 2.3.2. Tétel bizonyítása

Ezúttal a tétel bizonyítását az alábbi előállítás felírásával kezdjük:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^{(0,1)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0) &= \frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2} f(x_0-u,y_0-v)D_{n_1}(u)\widetilde{D}_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}[f(x_0-u,y_0-v) + f(x_0+u,y_0-v) - \\ &\qquad -f(x_0-u,y_0+v) - f(x_0+u,y_0+v)]D_{n_1}(u)\widetilde{D}_{n_2}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Majd, felhasználva (1.13)-at és (2.21)-et, a bizonyítás hasonlóképpen történik, mint a 2.3.1. Tétel esetében.

A 2.3.3. Tétel bizonyítása

A tétel bizonyítását két segédfüggvény bevezetésével kezdjük. Legyen $x := x_0 + u$, $y := y_0 + v$, és ekkor legyen

$$F(x,y) := \Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) = f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0),$$

valamint

$$g(x,y) := (e^{i(x-x_0)} - 1)^{-1}(e^{i(y-y_0)} - 1)^{-1} F(x,y).$$

Nyilvánvaló, hogy a (2.22) feltétel ekvivalens azzal, hogy $g \in L^1(\mathbb{T}^2)$, ezenkívül

$$F(x,y) = (e^{i(x-x_0)} - 1)(e^{i(y-y_0)} - 1) g(x,y). \tag{3.14}$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy F Fourier-együtthatóit minden $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ esetén a következőképpen írhatjuk fel:

(3.15)

$$\hat{F}(k,l) = \begin{cases} \hat{f}(k,l), & \text{ha } k \neq 0 \text{ és } l \neq 0, \\ \hat{f}(k,0) - f(\cdot, y_0)^\wedge(k), & \text{ha } k \neq 0 \text{ és } l = 0, \\ \hat{f}(0,l) - f(x_0, \cdot)^\wedge(l), & \text{ha } k = 0 \text{ és } l \neq 0, \\ \hat{f}(0,0) - f(\cdot, y_0)^\wedge(0) - f(x_0, \cdot)^\wedge(0) + f(x_0,y_0), & \text{ha } k = 0 \text{ és } l = 0. \end{cases}$$

Legyen $m_j, n_j \in \mathbb{Z}$, $m_j \leq n_j$ $(j = 1,2)$. Négy esetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy $0 \in [m_j, n_j]$ vagy $0 \notin [m_j, n_j]$ $(j = 1,2)$.

(a) eset: $0 \in [m_j, n_j]$ $(j = 1,2)$. Ekkor (3.15) alapján az F függvény kettős Fourier-sorának nemszimmetrikus téglányösszegeit az (x_0, y_0) pontban a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned} S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F; x_0, y_0) = {} & S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) - \\ & - \sum_{k=m_1}^{n_1} f(\cdot, y_0)^\wedge(k) e^{ikx_0} - \sum_{l=m_2}^{n_2} f(x_0, \cdot)^\wedge(l) e^{ily_0} + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

(b) eset: $0 \notin [m_1, n_1]$ és $0 \in [m_2, n_2]$. Ekkor

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F; x_0, y_0) = S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) - \sum_{k=m_1}^{n_1} f(\cdot, y_0)^\wedge(k) e^{ikx_0}.$$

(c) eset: $0 \in [m_1, n_1]$ és $0 \notin [m_2, n_2]$. Ekkor

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F; x_0, y_0) = S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) - \sum_{l=m_2}^{n_2} f(x_0, \cdot)^\wedge(l) e^{ily_0}.$$

(d) eset: $0 \notin [m_j, n_j]$ $(j = 1,2)$. Ekkor

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F; x_0, y_0) = S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0).$$

Másrészt, (3.14)-ből következik, hogy

$$\hat{F}(k,l) = \hat{g}(k-1,l-1)e^{-i(x_0+y_0)} - \hat{g}(k-1,l)e^{-ix_0} - \\ - \hat{g}(k,l-1)e^{-iy_0} + \hat{g}(k,l), \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2.$$

Elvégezve a kettős Abel-átrendezést, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(F;x_0,y_0) = \hat{g}(m_1-1,m_2-1)e^{i[(m_1-1)x_0+(m_2-1)y_0]} - \\ -\hat{g}(m_1-1,n_2)e^{i[(m_1-1)x_0+n_2y_0]} - \\ -\hat{g}(n_1,m_2-1)e^{i(n_1x_0+(m_2-1)y_0]} + \hat{g}(n_1,n_2)e^{i[n_1x_0+n_2y_0]}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ezen előkészületek után a 2.3.3. Tétel (i)–(iii) állításai a Riemann–Lebesgue-lemma segítségével bizonyíthatók. Most ezek részletezése következik.

Az (i) állítás bizonyítása

Tegyük fel, hogy $m_j < 0$ és $n_j > 0$ $(j = 1, 2)$. A konjugált sor definíciója alapján írhatjuk, hogy

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0) = i\left\{\sum_{k=m_1}^{-1}\sum_{l=m_2}^{n_2} - \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=m_2}^{n_2}\right\}\hat{f}(k,l)e^{i(kx_0+ly_0)}.$$

A (b) esetet kétszer alkalmazva, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0) = iS_{m_1,-1;m_2,n_2}(F;x_0,y_0) - iS_{1,n_1;m_2,n_2}(F;x_0,y_0) \\ +i\sum_{k=m_1}^{-1} f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx_0} - i\sum_{k=1}^{n_1} f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx_0}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

A (3.17) jobb oldalán álló első és második tag nullához konvergál, miközben $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$. Ez könnyen belátható (3.16) (először $n_1 := -1$-re, majd $m_1 := 1$-re alkalmazva) és a Riemann–Lebesgue-lemma segítségével. Továbbá, észrevehetjük, hogy (3.17) jobb oldalán a harmadik és a negyedik tag együtt a következő alakban írható:

$$\sum_{k=m_1}^{n_1}(-i\,\mathrm{sign}\,k)f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx_0},$$

amely éppen a (2.4) konjugált sor nemszimmetrikus részletösszege. Most, összevetve (3.17)-et az iménti észrevételekkel, kapjuk az (i) állításban szereplő sorok ekvikonvergenciáját.

Az (ii) állítás bizonyítása

Ez az (i) állítás szimmetrikus megfelelője, és bizonyítása is az (i) állítás bizonyításához hasonló módon történik (miközben kétszer alkazzuk a (c) esetet).

Az (iii) állítás bizonyítása

Tegyük fel, hogy $m_j < 0$ és $n_j > 0$ $(j = 1, 2)$. A konjugált sor definíciója alapján írhatjuk, hogy

$$\widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) =$$
$$= \left\{ -\sum_{k=m_1}^{-1} \sum_{l=m_2}^{-1} + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=m_2}^{-1} + \sum_{k=m_1}^{-1} \sum_{l=1}^{n_2} - \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \right\} \hat{f}(k,l) e^{i(kx_0+ly_0)}.$$

Négyszer alkalmazva a (d) esetet, kapjuk, hogy

$$\widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) = -S_{m_1,-1;m_2,-1}(F; x_0, y_0) + S_{1,n_1;m_2,-1}(F; x_0, y_0) +$$
$$+S_{m_1,-1;1,n_2}(F; x_0, y_0) - S_{1,n_1;1,n_2}(F; x_0, y_0). \tag{3.18}$$

(3.16) és (3.18), valamint a Riemann–Lebesgue-lemma alapján, azt kapjuk, hogy

$$\widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) \to -\hat{g}(-1,-1)e^{-i(x_0+y_0)} -$$
$$-\hat{g}(0,-1)e^{-iy_0} - \hat{g}(-1,0)e^{-ix_0} - \hat{g}(0,0),$$

ha $m_j \to -\infty$ és $n_j \to \infty$, $j = 1, 2$. Ez bizonyítja az (iii) állítást.

Ezzel a 2.3.3. Tétel bizonyítása teljes.

3.3. Telyakovskii típusú tétel bizonyításához szükséges segédtételek

A kétváltozós Telyakovskii típusú tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány segédtételre. Az első két lemma a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ku}{k}$ sor becsléséhez kapcsolódik, ezeket bizonyítjuk is. A másik három lemma pedig a kétváltozós Riemann–Stieltjes-integrálhoz kötődik. Ezeket bizonyítás nélkül közöljük.

Az első lemma a [17, 1. Lemma]-ben bizonyított becslés továbbfejlesztett alakja.

3.3.1. Lemma. *Ha a természetes számok $m_1 = 1 < m_2 < \ldots < m_p < \ldots$ sorozata kielégíti az (1.15) feltételt, akkor minden $0 < u \le \pi$ esetén igaz a*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \le \frac{\pi A}{m_{p_0} u}$$

becslés.

Bizonyítás. Világos, hogy $u = \pi$ esetén a becslés igaz, elegendő tehát az $u \in (0,\pi)$ esetet vizsgálni. Rögzítsünk egy ilyen u-t és használjuk a következő jól ismert becslést: tetszőleges $r, s \in \mathbb{N}$, $r \le s$ és $u \in (0,\pi)$ esetén igaz a következő becslés:

$$\left|\sum_{k=r}^{s} \frac{\sin ku}{k}\right| \le \frac{\pi}{ru}.$$

Ezen becslés alapján minden $m_p \le m \le M < m_{p+1}$ esetén írhatjuk, hogy

$$\left|\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k}\right| \le \frac{\pi}{mu},$$

ebből pedig következik, hogy

$$\max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left|\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k}\right| \le \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \frac{\pi}{mu} \le \frac{\pi}{m_p u}. \tag{3.19}$$

Összegezve ezeket a maximumokat és felhasználva (1.15)-öt, kapjuk, hogy

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left|\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k}\right| \le \sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{\pi}{m_p u} \le \frac{\pi A}{m_{p_0} u}.$$

Ezzel a 3.3.1. Lemmát bebizonyítottuk.

A következő segédtételben a [16]-beli 1. Tételt fejlesztjük tovább. Így a következő, u-ban egyenletes becslést kapjuk.

3.3.2. Lemma. *Ha a természetes számok $m_1 = 1 < m_2 < \ldots < m_p < \ldots$ sorozata kielégíti az (1.15) feltételt, akkor minden u esetén igaz a*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left|\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k}\right| \le (\pi + 2)A \tag{3.20}$$

becslés.

Bizonyítás. A periodicitás és a függvény párossága miatt elegendő a lemmát a $[0,\pi]$ intervallumon bizonyítani. Az $u = 0$ és az $u = \pi$ esetekben az állítás közvetelenül ellenőrizhető. Rögzítsünk tehát egy u-t, amelyre $u \in (0,\pi)$. Valamint válasszuk meg a $\mu = \mu(u)$ természetes számot úgy, hogy teljesüljön a

$$\frac{\pi}{\mu+1} \le u < \frac{\pi}{\mu}, \tag{3.21}$$

egyenlőtlenség, és keressük meg azt a $p_0 = p_0(u)$ indexet, amelyre

$$m_{p_0} \le \mu < m_{p_0+1}. \tag{3.22}$$

A (3.20)-ban szereplő szummát daraboljuk fel a következőképpen:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\le\sum_{p=1}^{p_0-1}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|+$$
$$+\max_{m_{p_0}\le m\le M\le\mu}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|+$$
$$+\max_{\mu+1\le m\le M<m_{p_0+1}}\left|\sum_{k=\mu+1}^{n}\frac{\sin ku}{k}\right|+$$
$$+\sum_{p=p_0+1}^{\infty}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|.$$

Az első és második szumma becslésénél a minden pozitív u-ra fennálló $\sin u<u$ egyenlőtlenséget használjuk fel:

$$\sum_{p=1}^{p_0-1}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\le\sum_{j=1}^{p_0-1}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{ku}{k}\right|=\tag{3.23}$$
$$=\sum_{j=1}^{p_0-1}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}(M-m+1)u=$$
$$=\sum_{j=1}^{p_0-1}(m_{p+1}-m_p)u=$$
$$=(m_{p_0}-m_1)u=(m_{p_0}-1)u,$$

illetve

$$\max_{m_{p_0}\le m\le M\le\mu}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\le\max_{m_{p_0}\le m\le M\le\mu}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{ku}{k}\right|=\tag{3.24}$$
$$=\max_{m_{p_0}\le m\le M\le\mu}(M-m+1)u=(\mu-n_{p_0}+1)u.$$

(3.23) és (3.24), valamint (3.21) felhasználásával nyerjük, hogy

$$\sum_{p=1}^{p_0-1}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|+\max_{m_{p_0}\le m\le M\le\mu}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\le\tag{3.25}$$
$$\le(\mu-n_{p_0}+1)u+(n_{p_0}-1)u=\mu u<\pi.$$

A harmadik szumma becslése során a (3.19) és a (3.21) egyenlőtlenségeket használjuk fel:

$$\max_{\mu+1\le m\le M<m_{p_0+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\le\frac{\pi}{(\mu+1)u}\le 1.\tag{3.26}$$

A negyedik szumma becsléséhez felhasználjuk a 3.3.1. Lemmát és a (3.21)–(3.22) egyenlőtlenségeket:

$$\sum_{p=p_0+1}^{\infty}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\le\frac{\pi A}{m_{p_0+1}u}\le A\frac{\pi}{(\mu+1)u}\le A.\tag{3.27}$$

Felhasználva most a (3.25)–(3.27) részeredményeket, adódik a következő becslés:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \le \pi + 1 + A \le (\pi + 2)A.$$

Ezzel a 3.3.2. Lemmát bebizonyítottuk.

A fenti lemmákon kívül szükség lesz még a következő három, a kétváltozós Riemann–Stieltjes-integrálra vonatkozó segédtételre. A 3.3.3. Lemma bizonyítása megtalálható [5]-ben.

3.3.3. Lemma. *Ha a $g(x, y)$ függvény folytonos az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon, és az $f(x, y)$ függvény Vitali értelemben korlátos változású ugyanitt, akkor a $g(x, y)$ függvény Riemann–Stieltjes-integrálható az $f(x, y)$ függvényre vonatkozóan az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon.*

A következő lemmában a Riemann–Stieltjes-integrálra vonatkozó parciális integrálás szabályának kétváltozós függvényekre történő kiterjesztése található [14, 2. Lemma].

3.3.4. Lemma. *Ha a $g(x, y)$ függvény folytonos az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon és az $f(x, y)$ függvény korlátos változású Hardy–Krause értelemben, akkor $f(x, y)$ integrálható a $g(x, y)$ függvényre vonatkozóan az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon Hardy–Krause értelemben és*

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d g(x,y)\,\mathrm{d}_x\,\mathrm{d}_y f(x,y) = {} & \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}_x\,\mathrm{d}_y g(x,y) - \\ & - \int_a^b f(x,d)\,\mathrm{d}_x g(x,d) + \int_a^b f(x,c)\,\mathrm{d}_x g(x,c) - \\ & - \int_c^d f(b,y)\,\mathrm{d}_y g(b,y) + \int_c^d f(a,y)\,\mathrm{d}_y g(a,y) + \\ & + f(b,d)g(b,d) - f(a,d)g(a,d) - \\ & - f(b,c)g(b,c) + f(a,c)g(a,c).\end{aligned}$$

Az utolsó lemma a kétváltozós Riemann–Stieltjes-integrál kiszámítását vezeti vissza Lebesgue-integrálra [14, 3. Lemma].

3.3.5. Lemma. *Ha az $f(x, y)$ függvény korlátos változású az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon Hardy–Krause értelemben, és a $g(x, y)$ függvény abszolút folytonos ugyanitt, azaz*

$$g(x,y) = \int_a^x \int_c^y h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C, \quad (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$$

valamely $h(x, y) \in L^1([a, b] \times [c, d])$ függvényre és C konstansra, akkor

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}_x\,\mathrm{d}_y g(x,y) = \int_a^b\int_c^d f(x,y)h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3.4. Telyakovskii típusú tétel bizonyítása

A (2.25) egyenlőtlenség bizonyítása

Felhasználva a Fourier-együtthatók definícióját, először alakítsuk át a (2.25)-ben szereplő belső kettős szummát a következő módon:

$$\sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} = \tag{3.28}$$

$$= \sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N}\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)e^{-i(ku+lv)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right)e^{i(kx+ly)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)\sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N} e^{-i(k(u-x)+l(v-y))}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)\left(\sum_{|k|=m}^{M} e^{-ik(u-x)}\right)\left(\sum_{|l|=n}^{N} e^{-il(v-y)}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

(itt felhasználjuk az $f(x,y)$ függvény 2π szerinti periodicitását)

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u,y+v)+f(x-u,y+v)+f(x+u,y-v)+$$

$$+f(x-u,y-v)]\left(\sum_{|k|=m}^{M} e^{-iku}\right)\left(\sum_{|l|=n}^{N} e^{-ilv}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u,y+v)+f(x-u,y+v)+f(x+u,y-v)+$$

$$+f(x-u,y-v)-4f(x,y)]\left(2\sum_{k=m}^{M}\cos ku\right)\left(2\sum_{l=n}^{N}\cos lv\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi_{xy}(u,v)\left(\sum_{k=m}^{M}\cos ku\right)\left(\sum_{l=n}^{N}\cos lv\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

ahol φ_{xy} a (2.9)-ben definiált függvény. Ebből a 3.3.4–3.3.5. Lemmák segítségével kapjuk, hogy

$$\sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi_{xy}(u,v)\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_v\left(\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right)\left(\sum_{l=n}^{N}\frac{\sin lv}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right)\left(\sum_{l=n}^{N}\frac{\sin lv}{l}\right)\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_v\varphi_{xy}(u,v).$$

Felhasználva ezt az eredményt, becsülhetjük a (2.25) egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést:

$$(3.29)\sum_{p=p_0}^{\infty}\sum_{q=q_0}^{\infty}\max_{m_{p_0}\le m\le M<m_{p+1}}\max_{n_{q_0}\le n\le N<n_{q+1}}\left|\sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{p=p_0}^{\infty}\sum_{q=q_0}^{\infty}\max_{m_{p_0}\le m\le M<m_{p+1}}\max_{n_{q_0}\le n\le N<n_{q+1}}\left|\left(\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right)\left(\sum_{l=n}^{N}\frac{\sin lv}{l}\right)\right|$$
$$\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_vV(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sum_{p=p_0}^{\infty}\max_{m_{p_0}\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\right)\left(\sum_{q=q_0}^{\infty}\max_{n_{q_0}\le n\le N<n_{q+1}}\left|\sum_{l=n}^{N}\frac{\sin lv}{l}\right|\right)$$
$$\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_vV(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])\,.$$

Most bontsuk fel a $[0,\pi]\times[0,\pi]$ téglalapot négy résztéglalapra az alábbi módon, ezáltal a következő integrálokat kapjuk:

$$\frac{1}{\pi^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{m_{p_0}}}\int_0^{\frac{\pi}{n_{q_0}}}+\int_0^{\frac{\pi}{m_{p_0}}}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n_{q_0}}}+\int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\right\}=:I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Az I_1 integrált vizsgálva, alkalmazzuk a 3.3.2. Lemmát:

$$I_1=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{m_{p_0}}}\int_0^{\frac{\pi}{n_{q_0}}}\left(\sum_{p=p_0}^{\infty}\max_{m_{p_0}\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\right)\left(\sum_{q=q_0}^{\infty}\max_{n_{q_0}\le n\le N<n_{q+1}}\left|\sum_{l=n}^{N}\frac{\sin lv}{l}\right|\right)$$
$$\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_vV(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])\le$$
$$\le\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{m_{p_0}}}\int_0^{\frac{\pi}{n_{q_0}}}(\pi+2)A(\pi+2)B\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_vV(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])=$$
$$=\frac{(\pi+2)^2AB}{\pi^2}V\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{m_{p_0}}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right)=$$
$$=\frac{(\pi+2)^2AB}{\pi^2m_{p_0}n_{q_0}}\sum_{k=1}^{m_{p_0}}\sum_{l=1}^{n_{q_0}}V\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{m_{p_0}}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right)\le$$
$$\le\frac{(\pi+2)^2AB}{\pi^2m_{p_0}n_{q_0}}\sum_{k=1}^{m_{p_0}}\sum_{l=1}^{n_{q_0}}V\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right).$$

Az I_2 vizsgálata során a 3.3.1–3.3.2. Lemmákat haszáljuk fel:

$$I_2=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{m_{p_0}}}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\left(\sum_{p=p_0}^{\infty}\max_{m_p\le m\le M<m_{p+1}}\left|\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right|\right)\left(\sum_{q=q_0}^{\infty}\max_{n_q\le n\le N<n_{q+1}}\left|\sum_{l=n}^{N}\frac{\sin lv}{l}\right|\right)$$
$$\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_vV(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])\le$$
$$\le\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{m_{p_0}}}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}(\pi+2)A\frac{\pi B}{n_{q_0}v}\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_vV(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])=$$
$$=\frac{(\pi+2)AB}{\pi n_{q_0}}\int_0^{\frac{\pi}{m_{p_0}}}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\frac{1}{v}\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_vV(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])=$$
$$=\frac{(\pi+2)AB}{\pi n_{q_0}}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\frac{1}{v}\,\mathrm{d}_vV\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{m_{p_0}}\right]\times[0,v]\right).$$

Az egyszerűbb írás kedvéért a konstanssal átszorozva, parciálisan integrálva, majd elvégezve egy helyettesítéses integrálást, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi n_{q_0}}{AB(\pi+2)} I_2 \le \\
&\le \left[\frac{1}{v} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0, v]\right)\right]_{v=\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{v=\pi} + \int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0, v]\right) \frac{1}{v^2} \, \mathrm{d}v \le \\
&\le \frac{1}{\pi} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0, \pi]\right) + \frac{1}{\pi} \int_1^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{v}\right]\right) \mathrm{d}v = \\
&= \frac{1}{\pi} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0, \pi]\right) + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \int_l^{l+1} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{v}\right]\right) \mathrm{d}v \le \\
&\le \frac{1}{\pi} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0, \pi]\right) + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \int_l^{l+1} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right) \mathrm{d}v = \\
&= \frac{1}{\pi} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0, \pi]\right) + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right) \le \\
&\le \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right) \le \\
&\le \frac{2}{\pi m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right),
\end{aligned}$$

azaz

$$I_2 \le \frac{2(\pi+2)AB}{\pi^2 m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right).$$

Hasonló módon becsülhetjük I_3-at is. Ennek eredményeként adódik, hogy:

$$\begin{aligned}
I_3 = \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n_{q_0}}} \left(\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left|\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k}\right|\right) \left(\sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{n_q \le n \le N < n_{q+1}} \left|\sum_{l=n}^{N} \frac{\sin lv}{l}\right|\right) \\
\mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v V(\varphi_{xy}, [0, u] \times [0, v]) \le \\
\le \frac{2(\pi+2)AB}{\pi^2 m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right).
\end{aligned}$$

Az I_4 vizsgálata során először a 3.3.1. Lemmát alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
I_4 = \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} \left(\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left|\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k}\right|\right) \left(\sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{n_q \le n \le N < n_{q+1}} \left|\sum_{l=n}^{N} \frac{\sin lv}{l}\right|\right) \\
\mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v \, \mathrm{V}(\varphi_{xy}, [0, u] \times [0, v]) \le \\
\le \frac{AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} \frac{1}{uv} \, \mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v \, \mathrm{V}(\varphi_{xy}, [0, u] \times [0, v]).
\end{aligned}$$

Majd a 3.3.4. Lemmát felhasználva, kapjuk, hogy

$$\int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} \frac{1}{uv} \, \mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v \, \mathrm{V}(\varphi_{xy}, [0,u] \times [0,v]) =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} \mathrm{V}(\varphi_{xy}, [0,u] \times [0,v]) \, \mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v \frac{1}{uv} -$$

$$- \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \mathrm{V}(\varphi_{xy}, [0,u] \times [0,\pi]) \, \mathrm{d}_u \frac{1}{u\pi} + \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,u] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \mathrm{d}_u \frac{n_{q_0}}{u\pi} -$$

$$- \int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} \mathrm{V}(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times [0,v]) \, \mathrm{d}_v \frac{1}{v\pi} + \int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0,v]\right) \mathrm{d}_v \frac{m_{p_0}}{v\pi} +$$

$$+ \mathrm{V}(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times [0,\pi]) \frac{1}{\pi^2} - \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0,\pi]\right) \frac{m_{p_0}}{\pi^2} -$$

$$- \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \frac{n_{q_0}}{\pi^2} + \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \frac{m_{p_0} n_{q_0}}{\pi^2}.$$

Ha itt elhagyjuk a harmadik és nyolcadik, valamint az ötödik és hetedik tagokat, akkor a kifejezés értéke nem nő, mivel

$$\int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,u] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \mathrm{d}_u \frac{n_{q_0}}{u\pi} - \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \frac{n_{q_0}}{\pi^2} =$$

$$= -\frac{n_{q_0}}{\pi} \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,u] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \frac{1}{u^2} \, \mathrm{d}u - \frac{n_{q_0}}{\pi^2} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) =$$

$$= -\frac{n_{q_0}}{\pi^2} \int_{1}^{m_{p_0}} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{u}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \mathrm{d}u - \frac{n_{q_0}}{\pi^2} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) =$$

$$= -\frac{n_{q_0}}{\pi^2} \left\{ \sum_{k=2}^{m_{p_0}} \int_{k-1}^{k} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{u}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \mathrm{d}u + \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \right\} \leq$$

$$\leq -\frac{n_{q_0}}{\pi^2} \left\{ \sum_{k=2}^{m_{p_0}} \int_{k-1}^{k} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \mathrm{d}u + \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \right\} =$$

$$= -\frac{n_{q_0}}{\pi^2} \left\{ \sum_{k=2}^{m_{p_0}} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) + \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \right\} =$$

$$= -\frac{n_{q_0}}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right) \leq 0.$$

Hasonló módon, a fenti átalakításokat megismételve, megmutatható az is, hogy

$$\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi} \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0,v]\right) \mathrm{d}_v \frac{m_{p_0}}{v\pi} - \mathrm{V}\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{m_{p_0}}\right] \times [0,\pi]\right) \frac{m_{p_0}}{\pi^2} \leq 0.$$

Tehát az említett tagok elhagyása után, majd a 3.3.5. Lemmát alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\frac{1}{uv}\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_v\,\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])\leq$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])\frac{1}{u^2}\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\\
&+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi}\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,\pi])\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,\pi]\times[0,v])\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v+\\
&+\frac{1}{\pi^2}\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,\pi]\times[0,\pi])+\frac{m_{p_0}n_{q_0}}{\pi^2}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{m_{p_0}}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right)=\\
=\ & \frac{1}{\pi^2}\int_1^{m_{p_0}}\int_1^{n_{q_0}}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{u}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{v}\right]\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\\
&+\frac{1}{\pi^2}\int_1^{m_{p_0}}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{u}\right]\times[0,\pi]\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{\pi^2}\int_1^{n_{q_0}}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{v}\right]\right)\mathrm{d}v+\\
&+\frac{1}{\pi^2}\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,\pi]\times[0,\pi])+\frac{m_{p_0}n_{q_0}}{\pi^2}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{m_{p_0}}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right)\leq\\
\leq\ & \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m_{p_0}-1}\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right)+\\
&+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m_{p_0}-1}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times[0,\pi]\right)+\frac{1}{\pi^2}\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right)+\\
&+\frac{1}{\pi^2}\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,\pi]\times[0,\pi])+\frac{m_{p_0}n_{q_0}}{\pi^2}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{m_{p_0}}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{n_{q_0}}\right]\right)\leq\\
\leq\ & \frac{5}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m_{p_0}-1}\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right).
\end{aligned}$$

Ennek megfelelően nyerjük, hogy:

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \frac{AB}{m_{p_0}n_{q_0}}\int_{\frac{\pi}{m_{p_0}}}^{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_{q_0}}}^{\pi}\frac{1}{uv}\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_v\,\mathrm{V}(\varphi_{xy},[0,u]\times[0,v])\leq\\
&\leq \frac{AB}{m_{p_0}n_{q_0}}\frac{5}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m_{p_0}-1}\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right)=\\
&= \frac{5AB}{\pi^2 m_{p_0}n_{q_0}}\sum_{k=1}^{m_{p_0}-1}\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right).
\end{aligned}$$

Végül az I_1, I_2, I_3 és I_4 integrálokra vonatkozó becslések összeadásával magát a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sum_{p=p_0}^{\infty}\sum_{q=q_0}^{\infty}\max_{m_{p_0}\leq m\leq M<m_{p+1}}\ \max_{n_{q_0}\leq n\leq N<n_{q+1}}\left|\sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=n}^{N}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}\right|\leq$$

$$\leq\frac{(\pi+4)^2AB}{\pi^2 m_{p_0}n_{q_0}}\sum_{k=1}^{m_{p_0}}\sum_{l=1}^{n_{q_0}}\mathrm{V}\left(\varphi_{xy},\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right).$$

A (2.26) egyenlőtlenség bizonyítása

A (2.26) kifejezésben szereplő belső kettős szummát a (3.28) vizsgálatához hasonló módon kezdjük átalakítani:

$$\sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u,v)\left(\sum_{|k|=m}^{M} e^{-ik(u-x)}\right)\left(\sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} e^{-il(v-y)}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi_{xy}(u,v)\left(\sum_{k=m}^{M}\cos ku\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\cos lv\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Most alkalmazva a 3.3.4. Lemmát, valamint felhasználva azt a tényt, hogy a $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(u,v)\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_v g(u)h(v)$ Riemann–Stieltjes-integrál értéke nem változik, ha a $h(v)$ függvényhez hozzáadunk egy C állandót, kapjuk, hogy:

$$\sum_{|k|=m}^{M}\sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1}\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi_{xy}(u,v)\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_v\left(\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right)\left(\frac{v}{2}+\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\frac{\sin lv}{l}\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi_{xy}(u,v)\,\mathrm{d}_u\,\mathrm{d}_v\left(\sum_{k=m}^{M}\frac{\sin ku}{k}\right)\left(\frac{v-\pi}{2}+\sum_{l=1}^{n_{q_0}-1}\frac{\sin lv}{l}\right).$$

Itt alkalmazva a 3.3.5. Lemmát, nyerjük, hogy:

$$\pi^2 \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} \hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right) \left(\frac{v-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin lv}{l} \right) \mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v \varphi_{xy}(u,v) -$$

$$- \int_0^\pi \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right) \left(\frac{\pi-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin l\pi}{l} \right) \mathrm{d}_u \varphi_{xy}(u,\pi) +$$

$$+ \int_0^\pi \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right) \left(\frac{0-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin l \cdot 0}{l} \right) \mathrm{d}_u \varphi_{xy}(u,0) -$$

$$- \int_0^\pi \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin k\pi}{k} \right) \left(\frac{v-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin lv}{l} \right) \mathrm{d}_v \varphi_{xy}(\pi,v) +$$

$$+ \int_0^\pi \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin k \cdot 0}{k} \right) \left(\frac{v-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin lv}{l} \right) \mathrm{d}_v \varphi_{xy}(0,v) +$$

$$+ \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin k\pi}{k} \right) \left(\frac{\pi-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin l\pi}{l} \right) \varphi_{xy}(\pi,\pi) -$$

$$- \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin k \cdot 0}{k} \right) \left(\frac{\pi-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin l\pi}{l} \right) \varphi_{xy}(0,\pi) -$$

$$- \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin k\pi}{k} \right) \left(\frac{0-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin l \cdot 0}{l} \right) \varphi_{xy}(\pi,0) +$$

$$+ \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin k \cdot 0}{k} \right) \left(\frac{0-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin l \cdot 0}{l} \right) \varphi_{xy}(0,0) =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right) \left(\frac{v-\pi}{2} + \sum_{l=1}^{n_{q_0}-1} \frac{\sin lv}{l} \right) \mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v \varphi_{xy}(u,v) -$$

$$-\pi \int_0^\pi \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \, \mathrm{d}_u \frac{1}{2} \varphi_{xy}(u,0) =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi \left(\sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right) \left(- \sum_{l=n_{q_0}}^{\infty} \frac{\sin lv}{l} \right) \mathrm{d}_u \, \mathrm{d}_v \varphi_{xy}(u,v) -$$

$$-\pi \int_0^\pi \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \, \mathrm{d}_u \varphi_x(f(\cdot,y),u).$$

Az utolsó lépés során felhasználtuk a $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin lv}{l} = \frac{v-\pi}{2}$ egyenlőséget.

A fenti eredmény felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \right) \left| \sum_{l=n_{q_0}}^{\infty} \frac{\sin lv}{l} \right|$$

$$\mathrm{d}_u\, \mathrm{d}_v V(\varphi_{xy}, [0,u] \times [0,v]) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \mathrm{d}_u V(\varphi_x(f(\cdot, y)), [0,u]) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \right) \left(\sum_{q=q_q}^{\infty} \max_{n_q \le n \le N < n_{q+1}} \left| \sum_{l=n}^{N} \frac{\sin lv}{l} \right| \right)$$

$$\mathrm{d}_u\, \mathrm{d}_v V(\varphi_{xy}, [0,u] \times [0,v]) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{k=m}^{M} \frac{\sin ku}{k} \right| \mathrm{d}_u V(\varphi_x(f(\cdot, y)), [0,u]) =: K_1 + K_2.$$

A K_1 kifejezést már becsültük a (3.29) vizsgálata során, amelyből adódik, hogy

$$K_1 \le \frac{(\pi+4)^2 AB}{\pi^2 m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\Big(\varphi_{xy}, \Big[0, \frac{\pi}{k}\Big] \times \Big[0, \frac{\pi}{l}\Big]\Big).$$

A K_2 kifejezést pedig becsülhetjük úgy, hogy Telyakovskii [18] munkájában szereplő 1. Tétel bizonyítását továbbfejlesztjük, felhasználva a 3.3.1-3.3.2. Lemmákat. A bizonyítás részleteit elhagyva, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$K_2 \le \frac{(\pi+4)A}{\pi m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x(f(\cdot, y)), \Big[0, \frac{\pi}{k}\Big]\right).$$

A fent nyert eredmények alapján kapjuk a bizonyítandó állítást:

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \le$$

$$\le \frac{(\pi+4)A}{\pi m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x(f(\cdot, y)), \Big[0, \frac{\pi}{k}\Big]\right) +$$

$$+ \frac{(\pi+4)^2 AB}{\pi^2 m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\Big(\varphi_{xy}, \Big[0, \frac{\pi}{k}\Big] \times \Big[0, \frac{\pi}{l}\Big]\Big).$$

A (2.27) egyenlőtlenség bizonyítása

A (2.26) egyenlőtlenség vizsgálatával analóg módon a (2.27) egyenlőtlenség érvényessége is bizonyítható.

Ezzel a 2.4.1. Tételt bizonyítottuk.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Dr. Móricz Ferenc professzornak, témavezetőmnek önzetlen segítségéért, folyamatos támogatásáért és hasznos tanácsaiért, melyekkel jelen értekezés megírását, illetve korábbi kutatómunkámat segítette.

Valamint szeretném köszönetemet kifejezi S. A. Telyakovskii professzornak, a moszkvai Sztyeklov Matematikai Intézet munkatársának, aki moszkvai részképzésem alatt segítette és írányította munkámat, amelynek eredményeként megszülettek a 2.4. fejezetben bemutatott eredmények.

Irodalomjegyzék

[1] C. R. ADAMS and J. A. CLARKSON, Properties of functions $f(x,y)$ of bounded variation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 711-730.

[2] R. BOJANIĆ, An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **26 (40)** (1979), 57-60.

[3] P. R. CHERNOFF, Pointwise convergence of Fourier series. *Amer. Math. Monthly*, **87** (1980), 399-400.

[4] J. A. CLARKSON and C. R. ADAMS, On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35** (1933), 824-854.

[5] M. FRÉCHET, Extension au cas des intégrals multiples d'une définition de l'intégrale due à Stieltjes, *Nouvelles Annales Math.*, **10** (1910), 241-256.

[6] V. FÜLÖP, Double cosine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **70** (2004), 91-100.

[7] V. FÜLÖP, Double sine series with nonnegative coefficients and Lipschitz classes, *Colloq. math.*, **105** (2006), 25-34.

[8] G. H. HARDY, On double Fourier series, *Quart. J. Math.*, **37** (1906), 53-79.

[9] E. W. HOBSON, *The Theory of Funcitons of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 3rd ed. Vol. I, Cambridge Univ. Press (London–New York, 1927).

[10] Á. JENEI and F. MÓRICZ, Extension of the Dini test to double Fourier series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **72** (2006), 135-145.

[11] Á. JENEI and F. MÓRICZ, Pointwise convergence of series conjugate to double Fourier series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **72** (2006), 555-567.

[12] А. ЙЕНЕИ, О скорости сходимости рядов Фурье двумерных функций ограниченной вариации, *Anal. Math.*, **35** (2009), megjelenés alatt.

[13] F. Móricz, A quantitative version of the Dirichlet–Jordan test for double Fourier series, *J. Approx. Theory*, **71** (1992), 344-358.

[14] F. Móricz, Order of magnitude of double Fourier coefficients of functions of bounded variation, *Analysis*, **22** (2002), 335-345.

[15] F. Móricz and W. R. Wade, An analogue of a theorem of Ferenc Lukács for double Walsh–Fourier series, *Acta Math. Hungar.*, **95 (4)** (2002), 323-336.

[16] С.А. Теляковский, О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации, *Тр. МИАН*, **219** (1997), 378-386.

[17] С.А. Теляковский, О равномерной сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации, *Тр. МИАН*, **232** (2001), 318-326.

[18] С.А. Теляковский, О скорости сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации, *Матем. заметки*, **72** (2002), 949-953.

[19] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I-II, Cambridge Univ. Press, U.K., (1959).

Összefoglaló

Értekezésünket a Fourier-sorok elméletének két klasszikus és két újabb eredményének ismertetésével kezdtük. Az előbbiek: Dini és Pringsheim konvergencia-kritériumai. Az újabb tételek: a Dirichlet–Jordan-tétel Bojanić által kidolgozott kvantitatív változata [2], valamint ennek Telyakovskii [18] általi továbbfejlesztése. A disszertáció további részében ezen tételeket általánosítottuk kétváltozós függvényekre.

Ismert tételek egyváltozós függvényekre

Dini konvergencia-kritériuma

Komplex értékű, 2π szerint periodikus $f \in L^1(\mathbb{T})$ függvényeket tekintünk, ahol $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ az egydimenziós tórusz. Az

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx} \tag{1}$$

Fourier-sor pontonkénti konvergenciáját vizsgáljuk, ahol

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{-iku}\, \mathrm{d}u, \quad k \in \mathbb{Z}$$

az f függvény Fourier-együtthatói. Nemszimmetrikus részletösszegeit $S_{m,n}(f;x)$-szel ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m \le n$), szimmetrikus részletösszegeit $S_n(f;x)$-szel ($n \in \mathbb{N}$) jelöljük.

Dini konvergencia-kritériuma a következőképpen fogalmazható meg.

1. Tétel. *Legyen* $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(i) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0 - u) + f(x_0 + u) - 2f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{2}$$

akkor $S_n(f;x_0) \to f(x_0)$, *ha* $n \to \infty$.

(ii) *Ha valamely* $x_0 \in \mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{3}$$

akkor $S_{m,n}(f;x_0) \to f(x_0)$, *ha* $m \to -\infty$ *és* $n \to \infty$.

Pringsheim konvergencia-kritériuma

Az (1)-ben szereplő Fourier-sor konjugált sorát, röviden: a konjugált sort, a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,k)\hat{f}(k)e^{ikx} \tag{4}$$

képlettel definiáljuk, amelynek nemszimmetrikus, valamint szimmetrikus részletösszegeit $\widetilde{S}_{m,n}(f;x)$-szel, illetve $\widetilde{S}_n(f;x)$-szel jelöljük. Az f függvény konjugált függvényét, röviden: az $\widetilde{f}$ konjugált függvényt, Cauchy főérték integrálként definiáljuk:

$$\widetilde{f}(x) := (\mathrm{P.V.})\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-u)-f(x+u)}{2\tan\frac{1}{2}u}\,du = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi\right\}.$$

A következő tétel (i) állítása mint Pringsheim konvergencia-kritériuma ismert (lásd pl. [19, Vol. I, p. 52]).

2. Tétel. *Legyen* $f\in L^1(\mathbb{T})$.

(i) *Ha valamely* $x_0\in\mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0-u)}{u}\in L^1(\mathbb{T}), \tag{5}$$

akkor $\widetilde{f}(x_0)$ *létezik mint Lebesgue-integrál, és* $\widetilde{S}_n(f;x_0)\to\widetilde{f}(x_0)$*, ha* $n\to\infty$.

(ii) *Ha valamely* $x_0\in\mathbb{T}$*-re*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\in L^1(\mathbb{T}), \tag{6}$$

akkor $\widetilde{S}_{m,n}(f;x_0)\to\widetilde{f}(x_0)$*, ha* $m\to-\infty$ *és* $n\to\infty$.

Bojanić és Telyakovskii tételei

A jólismert Dirichlet–Jordan-tétel szerint a korlátos változású, periodikus f függvény Fourier-sora minden x pontban az $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ értékhez konvergál, azaz

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Ezen konvergencia sebességére Bojanić [2] a következő becslést adta abban az esetben, ha feltesszük, hogy $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

3. Tétel. *Ha a* 2π *szerint periodikus* f *függvény korlátos változású a* $[-\pi,\pi]$ *intervallumon, akkor minden* x *és* $n=1,2,\ldots$ *esetén igaz a következő becslés:*

$$|S_n(f,x)-f(x)|\le\frac{3}{n}\sum_{k=1}^n V\left(\varphi_x,\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right), \tag{7}$$

ahol $\varphi_x(u):=f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$, $u\in[0,\pi]$.

A 3. Tétel eredményét Telyakovskii [18] fejlesztette tovább a következőképp.

4. Tétel. *Legyen* $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ *a természetes számok olyan sorozata, amely kielégíti a*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \le \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1, 2, \dots \tag{8}$$

feltételt, ahol $A > 1$ *állandó. Ha az* f *függvény korlátos változású, akkor minden* μ *és* x *esetén érvényes a következő becslés:*

$$\begin{aligned} |f(x) - S_\mu(f,x)| &= \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \le \\ &\le \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{m_{p_0}-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| + \sum_{p=p_0}^{\infty} \left| \sum_{k=m_p}^{m_{p+1}-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \le \\ &\le \frac{CA}{\mu+1} \sum_{k=1}^{\mu+1} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right), \end{aligned}$$

ahol $m_{p_0-1} \le \mu < m_{p_0}$ *és* A *a (8) feltételbeli konstans.*

Új eredmények kétváltozós függvényekre

Dini konvergencia-kritériumának kétváltozós kiterjesztése

A komplex értékű, mindkét változójában 2π szerint periodikus $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ függvény kettős Fourier-sorát a következőképpen értelmezzük:

$$f(x,y) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)}, \tag{9}$$

ahol $\hat{f}(k,l)$ az f függvény Fourier-együtthatói:

$$\hat{f}(k,l) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} f(u,v) e^{-i(ku+lv)} \, du \, dv, \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2.$$

A (9)-ben szereplő sor nemszimmetrikus, illetve szimmetrikus téglányösszegeit $S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y)$-szel, illetve $S_{n_1,n_2}(f;x,y)$-szel jelöljük.

Az $f(x,y_0)$, $x \in \mathbb{T}$, és $f(x_0,y)$, $y \in \mathbb{T}$ ($x := x_0$, $y := y_0$ rögzített), úgynevezett marginális függvények egyváltozós Fourier-soraira a következő jelöléseket használjuk:

$$f(x,y_0) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\cdot,y_0)^\wedge(k) e^{ikx}, \tag{10}$$

ahol

$$f(\cdot,y_0)^\wedge(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u,y_0) e^{-iku} \, du, \quad k \in \mathbb{Z};$$

és analóg módon

$$f(x_0,y) \sim \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x_0,\cdot)^\wedge(l)e^{ily}, \tag{11}$$

ahol

$$f(x_0,\cdot)^\wedge(l) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x_0,v)e^{-ilv}\,\mathrm{d}v, \quad l\in\mathbb{Z}.$$

Első tételünkben [10, 1. Tétel] elegendő feltételt adunk a (9)-beli Fourier-sor szimmetrikus téglányösszegeinek adott $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$ pontbeli konvergenciájára.

5. Tétel. *Legyen $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$, $A, A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, és valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{2,2}(f;x_0,y_0;u,v;A_1+A_2-A)\in L^1(\mathbb{T}^2).$$

Ha a (10)-ben és a (11)-ban szereplő egyváltozós Fourier-sorok szimmetrikus részletösszegei A_1-hez és A_2-höz kovergálnak az $x := x_0$, illetve az $y := y_0$ pontokban, akkor

$$S_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)\to A, \quad \textit{ha} \quad n_j\to\infty,\ j=1,2. \tag{12}$$

Fordítva, ha (12) teljesül, és ha a (10)-ben és a (11)-ban szereplő Fourier-sorok egyikének szimmetrikus részletösszegei konvergensek, akkor a másik Fourier-sor szimmetrikus részletösszegei is konvergensek.

Második tételünkben [10, 2. Tétel] a (9)-beli Fourier-sor nemszimmetrikus téglányösszegeinek adott pontbeli konvergenciájára adunk elégséges feltételt.

6. Tétel. *Legyen $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$ és valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f;x_0,y_0;u,v)\in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{13}$$

Ha a (10)-beli és a (11)-beli egyváltozós Fourier-sorok nemszimmetrikus részletösszegei $f(x_0,y_0)$-hoz konvergálnak, akkor

$$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0)\to f(x_0,y_0), \quad \textit{ha} \quad m_j\to-\infty \textit{ és } n_j\to\infty,\ j=1,2. \tag{14}$$

Fordítva, ha (14) teljesül, és ha a (10)-beli és a (11)-beli Fourier-sorok egyikének nemszimmetrikus részletösszegei $f(x_0,y_0)$-hoz konvergálnak, akkor a másik Fourier-sor nemszimmetrikus részletösszegei is ehhez konvergálnak.

Pringsheim konvergencia-kritériumának kétváltozós kiterjesztése

A (9) kettős sor első, második, illetve mindkét változóra vonatkozó konjugált sorát rendre az alábbi képletek adják:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,k)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}, \tag{15}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}, \tag{16}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,k)(-i\,\mathrm{sign}\,l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}. \tag{17}$$

Nemszimmetrikus téglányösszegeikre rendre az

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y), \quad \widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y) \quad \text{és} \quad \widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y)$$

jelöléseket használjuk, és hasonlóan jelöljük a szimmetrikus téglányösszegeket is.

A kettős konjugált sorok konvergenciájánál a (10) és a (11) Fourier-sorok konjugált sorai szintén fontos szerepet játszanak:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,k)f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx}, \tag{18}$$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,l)f(x_0,\cdot)^\wedge(l)e^{ily}. \tag{19}$$

Következő tételünkben [11, 1. Tétel] a (15) konjugált sor szimmetrikus téglányösszegeinek konvergenciájára adunk szükséges és elegendő feltételt.

7. Tétel. *Legyen $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$. Ha valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v)\in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{20}$$

akkor az $\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)$ szimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke $n_j\to\infty$ $(j=1,2)$ esetén, ha a (18) konjugált sor szimmetrikus részletösszegei konvergensek az $x:=x_0$ pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.

Hasonló tétel fogalmazható meg a (16) konjugált sorra is (lásd 2.3.2. Tétel). Erősebb feltételt megadva, a (15)–(17) konjugált sorok nemszimmetrikus téglányösszegeinek konvergenciájára is következtethetünk [11, 3. Tétel].

8. Tétel. *Legyen $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$, és tegyük fel, hogy valamely $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$-re*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f;x_0,y_0;u,v)\in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{21}$$

(i) *Az* $\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0)$ *nemszimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke* $m_j \to -\infty$ *és* $n_j \to \infty$ $(j=1,2)$ *esetén, ha a (18) konjugált sor nemszimmetrikus részletösszegei konvergensek az* $x := x_0$ *pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.*

(ii) *Az* $\widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0)$ *nemszimmetrikus téglányösszegeknek akkor és csak akkor létezik határértéke* $m_j \to -\infty$ *és* $n_j \to \infty$ $(j=1,2)$ *esetén, ha a (19) konjugált sor nemszimmetrikus részletösszegei konvergensek az* $y := y_0$ *pontban. Ebben az esetben a két határérték megegyezik.*

(iii) *Az* $\widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x_0,y_0)$ *nemszimmetrikus téglányösszegeknek létezik határértéke* $m_j \to -\infty$ *és* $n_j \to \infty$ $(j=1,2)$ *esetén.*

Telyakovskii tételének kétváltozós kiterjesztése

Telyakovskii tételének kiterjesztésekor az alábbi tételt [12, 3. Tétel] kapjuk.

9. Tétel. *Legyenek* $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ *és* $n_1 = 1 < n_2 < \dots < n_q < \dots$ *a természetes számoknak olyan sorozatai, amelyek kielégítik a következő két feltételt:*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \le \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1,2,\dots, \tag{22}$$

$$\sum_{q=q_0}^{\infty} \frac{1}{n_q} \le \frac{B}{n_{q_0}}, \quad q_0 = 1,2,\dots, \tag{23}$$

ahol $A, B > 1$ *állandók. Ha az* f *függvény korlátos változású Hardy–Krause értelemben (lásd [4]), akkor minden* p_0, q_0 *esetén és minden* (x,y) *pontban igazak a következő becslések:*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty}\sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \max_{n_q \le n \le N < n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \le \tag{24}$$
$$\le \frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right),$$

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \le \tag{25}$$
$$\le \frac{(\pi+4)A}{m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x(f(\cdot,y)), \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) +$$
$$+ \frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right)$$

és

$$\sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{n_q\le n\le N<n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=0}^{m_{p_0}-1} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)} \right| \le \tag{26}$$

$$\le \frac{(\pi+4)B}{n_{q_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)), \left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right) +$$

$$+\frac{(\pi+4)^2AB}{m_{p_0}n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right),$$

ahol A és B a (22) és a (23) becslésekbeli konstansok, valamint

$$\varphi_{xy}(u,v) := f(x+u,y+v)+f(x-u,y+v)+$$
$$+f(x+u,y-v+f(x-u,y-v)-4f(x,y), \quad (u,v)\in[0,\pi]\times[0,\pi].$$

A 9. Tételből közvetlenül adódik a következő állítás [12, Következmény].

1. Korollárium. *Ha a mindkét változója szerint 2π-periodikus $f(x,y)$ függvény korlátos változású a $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ téglalapon és*

$$f(x,y) = \frac{1}{4}[f(x-0,y-0)-f(x-0,y+0)-f(x+0,y-0)+f(x+0,y+0)], \tag{27}$$

akkor minden $m,n\ge 0$ esetén

$$|S_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)| \le \frac{C_1A}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1} V\left(\varphi_x(f(\cdot,y)), \left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right) +$$

$$+\frac{C_2B}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)), \left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right) +$$

$$+\frac{C_3AB}{(m+1)(n+1)}\sum_{k=1}^{m+1}\sum_{l=1}^{n+1} V\left(\varphi_{xy}, \left[0,\frac{\pi}{k}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{l}\right]\right).$$

Móricz [13, 3. Tétel] más módszerek felhasználásával szintén bizonyította a korolláriumban szereplő egyenlőtlenséget. Az 1. Korollárium tulajdonképpen Bojanić tételének (3. Tétel) kiterjesztése kétváltozós, Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvényekre.

Végül utalunk arra, hogy Hardy tétele [8], amely a Dirichlet–Jordan-tételnek (lásd pl. [19, Vol. I, p. 57]) a kiterjesztése kétváltozós, Hardy–Krause értelemben korlátos változású függvényekre, megkapható a fenti következményből.

10. Tétel (Hardy). *Ha a mindkét változójában 2π szerint periodikus $f(x,y)$ függvény korlátos változású a $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ téglalapon és kielégíti a (27) feltételt, akkor Fourier-sora minden (x,y) pontban az $f(x,y)$ értékhez konvergál.*

Summary

In the first part of our dissertation two classical and two later results of the theory of single Fourier series are introduced. The former ones are: the Dini and the Pringsheim tests. The latter theorems are: the quantitative version of the well-known Diriclet–Jordan test by Bojanić [2] and its further developped version by Telyakovskii [18]. In the further part of the dissertation these theorems are extended to functions in two variables.

Known results in one dimension

Dini test

Given a periodic (with period 2π) complex-valued function $f \in L^1(\mathbb{T})$, where $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ is the one-dimensional torus. We consider the pointwise convergence of Fourier series

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}, \tag{1}$$

where the Fourier coefficients of function f are defined by

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(u)e^{-iku}\,\mathrm{d}u, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

The unsymmetric and the symmetric partial sums of the series in (1) are denoted by $S_{m,n}(f;x)$, $m,n\in\mathbb{Z}$, $m \le n$ and $S_n(f;x)$, $n\in\mathbb{N}$, respectively.

The Dini test reads as follows.

Theorem 1. *Assume $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

(i) *If for some $x_0 \in \mathbb{T}$,*

$$\frac{f(x_0-u)+f(x_0+u)-2f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{2}$$

then $S_n(f;x_0) \to f(x_0)$ as $n\to\infty$.

(ii) *If for some $x_0 \in \mathbb{T}$,*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u} \in L^1(\mathbb{T}), \tag{3}$$

then $S_{m,n}(f;x_0) \to f(x_0)$ as $m\to-\infty$ and $n\to\infty$.

Pringsheim test

The series conjugate to the Fourier series in (1), or briefly: the conjugate series, is defined by

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-i\operatorname{sign}k)\hat{f}(k)e^{ikx}, \tag{4}$$

whose unsymmetric and symmetric partial sums are denoted by $\widetilde{S}_{m,n}(f;x)$ and $\widetilde{S}_n(f;x)$, respectively. The function conjugate to f, or briefly: the conjugate function $\widetilde{f}$, is defined as a Cauchy principal value integral:

$$\widetilde{f}(x) := (\text{P.V.})\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-u)-f(x+u)}{2\tan\frac{1}{2}u}\,du = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi\right\}.$$

Statement (i) in the next theorem is known as the Pringsheim test (see, e.g., [19, Vol. I, p. 52]).

Theorem 2. *Assume $f\in L^1(\mathbb{T})$.*

(i) *If for some $x_0\in\mathbb{T}$,*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0-u)}{u}\in L^1(\mathbb{T}), \tag{5}$$

then $\widetilde{f}(x_0)$ exists in the sense of Lebesgue integral and $\widetilde{S}_n(f;x_0)\to\widetilde{f}(x_0)$ as $n\to\infty$.

(ii) *If for some $x_0\in\mathbb{T}$,*

$$\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\in L^1(\mathbb{T}), \tag{6}$$

then $\widetilde{S}_{m,n}(f;x_0)\to\widetilde{f}(x_0)$ as $m\to-\infty$ and $n\to\infty$.

Theorems of Bojanić and Telyakovskii

According to the well-known Dirichlet–Jordan theorem, the Fourier series of a periodic function f of bounded variation converges to $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ at each point x, that is,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

For the rate of this convergence, Bojanić [2] gave the following estimate in the case when $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

Theorem 3. *If a periodic function f is of bounded variation on the interval $[-\pi,\pi]$, then the following estimate holds for every x and $n=1,2,\dots$:*

$$|S_n(f,x)-f(x)|\le\frac{3}{n}\sum_{k=1}^n V\left(\varphi_x,\left[0,\frac{\pi}{k}\right]\right), \tag{7}$$

where $\varphi_x(u):=f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$, $u\in[0,\pi]$.

The statement of Theorem 3 was developped by Telyakovskii [18] as follows.

Theorem 4. *Let* $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_p < \dots$ *be a sequence of natural numbers such that the condition*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \le \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1, 2, \dots \tag{8}$$

is satisfied, where $A > 1$ *is a constant. If a function* f *is of bounded variation, then for every* μ *and* x *the following estimate holds:*

$$\begin{aligned} |f(x) - S_\mu(f,x)| &= \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \le \\ &\le \left| \sum_{|k|=\mu+1}^{m_{p_0}-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| + \sum_{p=p_0}^{\infty} \left| \sum_{k=m_p}^{m_{p+1}-1} \hat{f}(k) e^{ikx} \right| \le \\ &\le \frac{CA}{\mu+1} \sum_{k=1}^{\mu+1} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right), \end{aligned}$$

where $m_{p_0-1} \le \mu < m_{p_0}$ *and* A *is the constant occurring in (8).*

New results in two dimensions

Extension of the Dini test to double Fourier series

The double Fourier series of a complex-valued periodic (with period 2π) function $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ is defined by

$$f(x,y) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)}, \tag{9}$$

wherethe Fourier coefficients $\hat{f}(k,l)$ az f are defined by

$$\hat{f}(k,l) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} f(u,v) e^{-i(ku+lv)} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v, \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2.$$

The unsymmetric and the symmetric rectangular partial sums of the series in (9) are denoted by $S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y)$ and $S_{n_1,n_2}(f;x,y)$, respectively.

For the single Fourier series of the so-called marginal functions $f(x,y_0)$, $x \in \mathbb{T}$, and $f(x_0,y)$, $y \in \mathbb{T}$, at $x := x_0$, $y := y_0$, respectively, we use the following notations:

$$f(x,y_0) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\cdot,y_0)^\wedge(k) e^{ikx}, \tag{10}$$

where

$$f(\cdot,y_0)^\wedge(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u,y_0) e^{-iku} \,\mathrm{d}u, \quad k \in \mathbb{Z};$$

and analogously

(11) $$f(x_0, y) \sim \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x_0, \cdot)^\wedge(l) e^{ily},$$

where

$$f(x_0, \cdot)^\wedge(l) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x_0, v) e^{-ilv}\,\mathrm{d}v, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

In our first theorem [10, Theorem 1], we give a sufficient condition for the convergence of the symmetric rectangular partial sums of the Fourier series in (9) at a given point $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$.

Theorem 5. *Assume $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $A, A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, and for some $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$,*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{2,2}(f; x_0, y_0; u, v; A_1 + A_2 - A) \in L^1(\mathbb{T}^2).$$

If the symmetric partial sums of the single Fourier series in (10) and (11) converge to A_1 and A_2 at $x := x_0$ and $y := y_0$, respectively, then

(12) $$S_{n_1,n_2}(f; x_0, y_0) \to A \quad as \quad n_j \to \infty,\ j = 1, 2.$$

Conversely, if (12) is satisfied and if the symmetric partial sums of one of the Fourier series in (10) and (11) converge, then so do the symmetric partial sums of the other Fourier series.

In second theorem [10, Theorem 2], we give a sufficient condition for the convergence of the unsymmetric rectangular partial sums of Fourier series in (9) at a given point.

Theorem 6. *Assume $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ and for some $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$,*

(13) $$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2).$$

If the unsymmetric partial sums of the single Fourier series in (10) and (11) converge to $f(x_0, y_0)$, then

(14) $$S_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0) \to f(x_0, y_0) \quad as \quad m_j \to -\infty \text{ and } n_j \to \infty,\ j = 1, 2.$$

Conversely, if (14) is satisfied and if the unsymmetric partial sums of one of the Fourier series in (10) and (11) converge $f(x_0, y_0)$, then so do the unsymmetric partial sums of the other Fourier series.

Extension of the Pringsheim test to double Fourier series

The series conjugate to the double Fourier series in (9) can be defined in several ways. The conjugate series with respect to the first variable is defined by

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,k)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}, \tag{15}$$

the conjugate series with respect to the second variable is defined by

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}, \tag{16}$$

and the conjugate series with respect to both variables is defined by

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,k)(-i\,\mathrm{sign}\,l)\hat{f}(k,l)e^{i(kx+ly)}. \tag{17}$$

The unsymmetric rectangular partial sums of series (15)–(17) are denoted by

$$\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y),\quad \widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y),\quad\text{and}\quad \widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f;x,y),$$

respectively. The symmetric rectangular partial sums are denoted analogously.

In the investigation of convergence of double conjugate series, the conjugate series of the single Fourier series (10) and (11) play important roles. They are the following ones:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,k)f(\cdot,y_0)^\wedge(k)e^{ikx}, \tag{18}$$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-i\,\mathrm{sign}\,l)f(x_0,\cdot)^\wedge(l)e^{ily}. \tag{19}$$

In our next theorem [11, Theorem 1] we give a sufficient and necessary condition for the convergence of thy symmetric rectangular partial sums of conjugate series (15).

Theorem 7. *Assume $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$. If for some $(x_0,y_0)\in\mathbb{T}^2$,*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,2}(f;x_0,y_0;u,v)\in L^1(\mathbb{T}^2), \tag{20}$$

then the limit of $\widetilde{S}^{(1,0)}_{n_1,n_2}(f;x_0,y_0)$ as $n_j\to\infty$ $(j=1,2)$ exists if and only if the symmetric partial sums of the conjugate series (18) converge at $x:=x_0$, and in this case two limits coincide.

We can give analogous theorem for conjugate series (16) (see [11, Theorem 2]). Under a stronger condition, one can prove the convergence of the unsymmetric rectangular partial sums of the conjugate series (15)–(17) [11, Theorem 3].

Theorem 8. *Assume $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ and that for some $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$,*

$$u^{-1}v^{-1}\Delta_{1,1}(f; x_0, y_0; u, v) \in L^1(\mathbb{T}^2). \tag{21}$$

(i) *The limit of $\widetilde{S}^{(1,0)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$ as $m_j \to -\infty$ and $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ exists if and only if the unsymmetric partial sums of the conjugate series (18) converge at $x := x_0$, and in this case the two limits coincide.*

(ii) *The limit of $\widetilde{S}^{(0,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$ as $m_j \to -\infty$ and $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ exists if and only if the unsymmetric partial sums of the conjugate series (19) converge at $y := y_0$, and in this case the two limits coincide.*

(iii) *The limit of $\widetilde{S}^{(1,1)}_{m_1,n_1;m_2,n_2}(f; x_0, y_0)$ as $m_j \to -\infty$ and $n_j \to \infty$ $(j = 1, 2)$ exists.*

Extension of Telyakovskii's theorem to function in two variables

Telyakovskii's theorem is extended as follows [12, Theorem 3].

Theorem 9. *Let $m_1 = 1 < m_2 < \cdots < m_p < \ldots$ and $n_1 = 1 < n_2 < \cdots < n_q < \ldots$ be sequences of natural numbers such that the conditions*

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{m_p} \le \frac{A}{m_{p_0}}, \quad p_0 = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

$$\sum_{q=q_0}^{\infty} \frac{1}{n_q} \le \frac{B}{n_{q_0}}, \quad q_0 = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

are satisfied, where $A, B > 1$ are constants. If a periodic function f is of bounded variation over the rectangle $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ in the sense of Hardy and Krause (see [4]), then the following estimate holds for all natural numbers p_0, q_0 and all points (x, y):

$$\sum_{p=p_0}^{\infty}\sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \max_{n_q \le n \le N < n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \le \tag{24}$$
$$\le \frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right),$$

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \max_{m_p \le m \le M < m_{p+1}} \left| \sum_{|k|=m}^{M} \sum_{|l|=0}^{n_{q_0}-1} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \le \tag{25}$$
$$\le \frac{(\pi+4)A}{m_{p_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} V\left(\varphi_x(f(\cdot, y)), \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) +$$
$$+\frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right)$$

and

$$\text{(26)}\qquad \sum_{q=q_0}^{\infty} \max_{n_q \le n \le N < n_{q+1}} \left| \sum_{|k|=0}^{m_{p_0}-1} \sum_{|l|=n}^{N} \hat{f}(k,l) e^{i(kx+ly)} \right| \le$$

$$\le \frac{(\pi+4)B}{n_{q_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)), \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right) +$$

$$+ \frac{(\pi+4)^2 AB}{m_{p_0} n_{q_0}} \sum_{k=1}^{m_{p_0}} \sum_{l=1}^{n_{q_0}} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right),$$

where A *and* B *are the constants occurring in (22) and a (23), and*

$$\varphi_{xy}(u,v) := f(x+u, y+v) + f(x-u, y+v) +$$

$$+ f(x+u, y-v + f(x-u, y-v) - 4f(x,y), \quad (u,v) \in [0,\pi] \times [0,\pi].$$

An immediate consequence of Theorem 9 is the following [12, Corollary].

Corollary 1. *If a periodic (with period* 2π*) function* $f(x,y)$ *is of bounded variation over the rectangle* $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ *and*

$$\text{(27)}\quad f(x,y) = \frac{1}{4}[f(x-0,y-0) - f(x-0,y+0) - f(x+0,y-0) + f(x+0,y+0)],$$

then for all integers $m, n \ge 0$ *we have*

$$|S_{m,n}(f;x,y) - f(x,y)| \le \frac{C_1 A}{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} V\left(\varphi_x(f(\cdot,y)), \left[0, \frac{\pi}{k}\right]\right) +$$

$$+ \frac{C_2 B}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} V\left(\varphi_y(f(x,\cdot)), \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right) +$$

$$+ \frac{C_3 AB}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{n+1} V\left(\varphi_{xy}, \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{l}\right]\right).$$

We note that Móricz [13, Theorem 3] proved the inequality in Corollary 1 in a different way. We also note that Corollary 1 is a two-dimensional extension of Theorem 3 by Bojanić. Furthermore, Theorem 10 below by Hardy [8], which is a two-dimensional extension of the classical Dirichlet–Jordan theorem (see, e.g., [19, Vol. I, p. 57]) can be early obtained from Corollary 1.

Theorem 10 (Hardy). *If a periodic (with period* 2π*) function* f *is of bounded variation over the rectangle* $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ *and satisfies condition (27), then its double Fourier series converges to* $f(x,y)$ *at each point* (x,y).