Logika és faautomaták

Ph.D. értekezés tézisei

Iván Szabolcs

Témavezető:
Ésik Zoltán

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem

Számítástudomány Alapjai Tanszék

2008.

Bevezetés

A szavakon, fákon és egyéb struktúrákon értelmezett különböző logikák (első- és másodrendű logika, temporális logikák) kifejezőerejének pontos karakterizációja erősen kutatott terület. A klasszikus esetben, amikor a logikában (véges vagy végtelen) szavak fölötti nyelveket definiálunk, a legtöbb esetre van jellemzési tétel.

Az FO($<$), vagyis a pozíciók fölötti rendezéssel ellátott elsőrendű logika esetében például McNaughton és Papert klasszikus eredményének [23] és Schützenberger [33] munkájának kombinációja szerint egy véges szavak fölötti nyelv pontosan akkor definiálható elsőrendben, ha szintaktikus monoidja véges és aperiodikus, vagy ezzel ekvivalensen, ha minimális automatája véges és számlálómentes. Továbbá, ez a nyelvosztály egybeesik az LTL lineáris temporális logikában definiálható nyelvekével [21].

Hasonló aperiodicitási feltétel karakterizálja az elsőrendű logika és az LTL kifejezőerejét végtelen szavakon is [24, 25]. Ezekből az eredményekből következik, hogy eldönthető az a probléma, hogy véges vagy végtelen szavak egy nyelve definiálható-e elsőrendben. A Krohn-Rhodes tétel [4] szerint egy véges monoid pontosan akkor aperiodikus, ha benne van a véges monoidok legszűkebb olyan, a koszorúszorzatra zárt pszeudovarietásában, mely tartalmaz egy bizonyos U_2 háromelemű monoidot, vagy ezzel ekvivalensen, a véges monoidok legszűkebb olyan, a blokkszorzatra zárt pszeudovarietásában, mely tartalmaz egy bizonyos U_1 kételemű monoidot [34].

Ha a fenti kérdéseket a (véges, rangolt és rendezett) fákra fogalmazzuk meg, többségük a mai napig nyitott probléma. A véges fákon értelmezett elsőrendű logika definiálhatósági problémájának eldönthetősége régi nyitott probléma [20, 28, 29, 38], ha a logikát a leszármazott relációval, vagy a leszármazott és a közvetlen leszármazott relációkkal (ezeket a logikákat rendre FO($<$) és FO($<, S_i$) jelöli) látjuk el. Az FO(S_i) esete (amikor a logika csak a közvetlen leszármazott relációval van ellátva) egy friss eredmény szerint eldönthető [2].

Az aperiodicitás fogalmát fákra több különböző módon kiterjeszthetjük. Egy lehetséges kiterjesztést a [20, 38] munkákban vizsgáltak; ez a kiterjesztés az elsőrendben definiálhatóság egy szükséges, de nem elegendő feltételének bizonyult. [11]-ben bevezettük aperiodicitási fogalmak egy végtelen hierarchiáját, és vizsgáltuk ezek kapcsolatát a logikai definiálhatósággal.

[14]-ben igazolásra került, hogy (rangolt, rendezett) véges fák egy nyelve pontosan akkor definiálható elsőrendben, ha ,,szintaktikus preklónja" benne van a lokálisan véges preklónok azon legszűkebb, a preklónok blokkszorzatára zárt pszeudovarietásában, mely tartalmaz egy bizonyos egyszerű kételemű algebrához kanonikusan hozzárendelt preklónt. Ily módon az elsőrendben való definiálhatóság problémája visszavezethető ennek a pszeudovarietásnak az eldöntési kérdésére. Azonban [14]-ben ennek a kérdésnek az eldöntési státusza nyitva maradt.

Az elsőrendben való definiálhatóság szoros kapcsolatban áll a CTL és CTL* logikák [1, 5, 32] kifejezőerejének kérdésével: mely fanyelvek definiálhatók CTL-ben, illetve CTL*-ban? Mindkét logika a szavak fölött értelmezett LTL logika kiterjesztése (megjegyezzük, hogy egy harmadik, szintén LTL-nek nevezett kiterjesztés nem összehasonlítható a CTLlel). [18] eredményei szerint bizonyos fák esetében az elsőrendben való definiálhatóság ekvivalens a CTL*-ban definiálhatósággal. [8]-ban és [9]-ben egy CTL-szerű temporális logika, az FTL($\mathcal{L}$) lett társítva (reguláris) fanyelvek minden $\mathcal{L}$ osztályához. Itt igazolásra került, hogy ha $\mathcal{L}$ reguláris fanyelvek egy olyan osztálya, melyre minden $\mathcal{L}$-beli nyelv összes hányadosa definiálható FTL($\mathcal{L}$)-ben, továbbá a ,,rákövetkezési modalitások kifejezhetők", úgy egy fanyelv pontosan akkor definiálható FTL($\mathcal{L}$)-ben, ha reguláris, és minimális automatája beletartozik a véges faautomaták azon legszűkebb, a kaszkád szorzatra zárt pszeudovarietásába, mely tartalmazza az $\mathcal{L}$-beli nyelvek minimális automatáit és a véges definit faautomatákat [6, 19]. Véges faautomaták kaszkád szorzatait [6, 10, 15, 16, 31]-ben vizsgálták. Ez a fogalom erősen összefügg a klónok koszorúszorzatával [39].

[12]-ben eltávolítottuk a fenti eredményben szereplő ,,a rákövetkezési modalitások kifejezhetők" feltételt. Ezt a kaszkád szorzat egy speciális esetének bevezetésével értük el, melyet Moore szorzatnak neveztünk. Megmutattuk, hogy ha $\mathcal{L}$ reguláris nyelvek egy olyan osztálya, melyre $\mathcal{L}$ elemeinek bármely hányadosa definiálható FTL($\mathcal{L}$)-ben, úgy egy fanyelv pontosan akkor definiálható FTL($\mathcal{L}$)-ben, ha reguláris és minimális automatája beleesik a véges faautomaták azon legszűkebb, a Moore szorzatra zárt pszeudovarietásába, mely tartalmazza $\mathcal{L}$ elemeinek minimális automatáit, valamint a véges 1-definit faautomatákat. Az eredmény egy másik megfogalmazása a következő: legyen **K** véges faautomaták egy osztálya, és jelölje FTL(**K**) azt az FTL($\mathcal{L}$) logikát, ahol $\mathcal{L}$ azon fanyelveket tartalmazza, melyek felismerhetők egy **K**-beli faautomatával. Ekkor egy fanyelv pontosan akkor definiálható FTL(**K**)-ban, ha minimális automatája beleesik a véges faautomaták azon legszűkebb, a Moore szorzatra zárt pszeudovarietásába (ezeket Moore pszeudovarietásoknak nevezzük), mely tartalmazza **K**-t és a véges 1-definit faautomatákat.

[13]-ban a fenti tétel egy alkalmazását mutattuk meg; véges összefüggő faautomaták néhány kis Moore pszeudovarietásáról igazoltuk, hogy eldönthetőek. Ezen eredmények a CTL logika két szintaktikus töredékének, a CTL(EF$^+$) és a CTL(EF*) töredékeknek a definiálhatósági problémájának eldönthetőségét vonják maguk után. Ezek a töredékek egyetlen modalitást tartalmaznak, a CTL logika EF modalitásának rendre a szigorú ill. megengedő változatát. [3]-ban ezt már megmutatták a CTL(EF$^+$) töredék esetére, míg a CTL(EF*) esete náluk nyitott problémaként szerepel.

[41] eltérő módszerekkel szintén megadott egy effektív karakterizációt a CTL(EF*) logikára. Ebben a munkában egy Ehrenfeucht-Fraïssé típusú játék [22] került bevezetésre. Jelen disszertáció egy még nem publikált eredménye az, hogy fanyelvek tetszőleges $\mathcal{L}$ osztályára és $n \geq 0$ számra definiálunk egy kétszemélyes játékot, az n-fordulós $\mathcal{L}$-játékot, melyet két versengő játékos játszik fák egy (s, t) párján. A játék a következő tulajdonsággal rendelkezik: két fa, s és t pontosan akkor egyezik meg minden, legfeljebb n mélységű FTL($\mathcal{L}$)-formulán (ezt $s \equiv_{\mathcal{L}}^{n} t$ jelöli), ha a második játékosnak van nyerő stratégiája az n-fordulós $\mathcal{L}$-játékban az (s, t) páron. Ha $\mathcal{L}$ fanyelvek egy véges osztálya, akkor $\equiv_{\mathcal{L}}^{n}$ egy véges indexű ekvivalenciareláció. Ebből következően fanyelvek tetszőleges véges $\mathcal{L}$ osztályára fennáll, hogy egy L fanyelv pontosan akkor definiálható FTL($\mathcal{L}$)-ben, ha létezik egy olyan $n \geq 0$ szám, melyre az első játékosnak van nyerő stratégiája az n-fordulós $\mathcal{L}$-játékban fák bármely olyan (s, t) párján, melyre $s \in L$ és $t \notin L$.

Előzetes fogalmak

Nemnegatív egészek bármely véges, nemüres R halmazát *rangtípusnak* nevezzük; R elemei az *aritások*. Véges, nemüres, páronként diszjunkt halmazok tetszőleges $\Sigma = \bigcup_{n\in R} \Sigma_n$ unióját R rangtípusú szignatúrának nevezzük. Rögzítjük *változók* egy $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ megszámlálhatóan végtelen halmazát, mely diszjunkt minden szignatúrától. Az $\{x_1, \dots, x_n\}$ halmazt X_n jelöli.

Adott R rangtípusú Σ szignatúrához és $n \geq 0$ egészhez a *ΣX_n-fák* $T_\Sigma(X_n)$ halmaza a legszűkebb olyan halmaz, mely teljesíti az alábbi feltételeket:

1. bármely $x \in X_n$ változó ΣX_n-fa;
2. ha $0 \leq k \in R$ egy aritás, $\sigma \in \Sigma_k$ egy szimbólum és $t_1, \dots, t_k$ ΣX_n-fák, akkor $\sigma(t_1, \dots, t_k)$ is egy ΣX_n-fa.

Egy $t \in T_\Sigma(X_n)$ fa *valódi*, ha nem egyetlen változó. A változómentes fák $T_\Sigma(X_0)$ halmazát T_Σ jelöli, míg a *Σ-környezetek* CT_Σ halmaza azokat a $T_\Sigma(X_1)$ fákat tartalmazza, melyekben x_1 pontosan egyszer fordul elő.

Ha $t \in T_\Sigma(X_n)$ egy fa és $\underline{t} = (t_1, \dots, t_n)$ ΣX_m-fák egy n-ese, akkor $t(\underline{t})$ azt a fát jelöli, melyet t-ből kapunk oly módon, hogy minden x_i, $i = 1, \dots, n$ helyére behelyettesítjük a a t_i fát. Ha $t \in T_\Sigma(X_1)$, akkor $t(t_1)$ helyett tt_1-et írunk. Azt mondjuk, hogy a t_2 fa a t fának egy *részfája*, ha $t = t_1 t_2$ valamely $t_1 \in CT_\Sigma$-ra. A t fa gyökérszimbólumát $\mathrm{Root}(t)$ jelöli.

Változómentes Σ-fák tetszőleges halmazát (Σ-)*fanyelvnek* nevezzük. Ha $\zeta \in CT_\Sigma$ egy Σ-környezet és $L \subseteq T_\Sigma$ egy Σ-fanyelv, akkor az L fanyelv ζ szerinti *hányadosa* a $\zeta^{-1}(L) = \{t : \zeta t \in L\}$ fanyelv.

Ha adott egy Σ szignatúra és egy A halmaz, ahol A, Σ és X páronként diszjunktak, valamint egy $n \geq 0$ szám, akkor a *$\Sigma A X_n$-polinomszimbólumok* $T_{\Sigma,A}(X_n)$ halmaza az a legszűkebb halmaz, mely teljesíti a következő feltételeket:

1. bármely $x \in X_n$ változó egy $\Sigma A X_n$-polinomszimbólum;
2. bármely $a \in A$ elem egy $\Sigma A X_n$-polinomszimbólum;
3. ha $0 \leq k \in R$ egy aritás, $\sigma \in \Sigma_k$ egy szimbólum és $p_1, \dots, p_k$ $\Sigma A X_n$-polinomszimbólumok, akkor $\sigma(p_1, \dots, p_k)$ is egy $\Sigma A X_n$-polinomszimbólum.

Egy polinomszimbólumot *valódinak* nevezünk, ha nem egyetlen változó. A változómentes ΣA-polinomszimbólumok halmazát $T_{\Sigma,A}$ jelöli, míg a *ΣA-polinomkörnyezetek* $CT_{\Sigma,A}$ halmazába azok a $\Sigma A X_1$-polinomszimbólumok tartoznak, melyekben x_1 pontosan egyszer szerepel. A p polinomszimbólum gyökérszimbólumát $\mathrm{Root}(p)$ jelöli.

Ha Σ és Δ ugyanazon R rangtípusú szignatúrák, és $h : \Sigma \to \Delta$ egy rangtartó leképezés, akkor h egy *literális fahomomorfizmust* indukál $T_\Sigma(X)$-ből $T_\Delta(X)$-be, amit szintén h jelöl: az $s \in T_\Sigma(X)$ fa $h(s)$ képét úgy kapjuk, hogy s minden olyan csúcsát, mely egy $\sigma \in \Sigma_n$ szimbólummal van címkézve, átcímkézünk $h(\sigma)$-ra. A változóval címkézett csúcsok címkéje nem változik.

Egy R rangtípusú Σ szignatúra fölötti (Σ-)faautomata egy olyan $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ pár, ahol A *állapotok* egy nemüres halmaza és minden $\sigma \in \Sigma_n$ szimbólumhoz tartozik egy $\sigma^{\mathbb{A}} : A^n \to A$ *elemi operáció*. $\mathbb{A}$-t *véges* faautomatának nevezzük, ha A véges.

Ha $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ és $\mathbb{B} = (B, \Sigma)$ olyan Σ-faautomaták, ahol $B \subseteq A$ és minden $\sigma^{\mathbb{B}}$ elemi operáció a megfelelő $\sigma^{\mathbb{A}}$ elemi operáció B-re való megszorítása, akkor $\mathbb{B}$-t az $\mathbb{A}$ egy *részautomatájának* nevezzük.

Ha $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ és $\mathbb{B} = (B, \Sigma)$ faautomaták, akkor *direkt szorzatuk* az az $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = (A \times B, \Sigma)$ faautomata, melynek állapothalmaza az $A \times B$ szorzathalmaz, és melyben az elemi operációk komponensenként értelmezettek.

A $\mathbb{B} = (B, \Delta)$ faautomata egy *átnevezése* az $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomatának (itt Σ és Δ azonos rangtípusúak), ha $A = B$ és $\mathbb{B}$ minden elemi operációja egyben az $\mathbb{A}$ egy elemi operációja is.

Ha $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ és $\mathbb{B} = (B, \Sigma)$ faautomaták, egy $h : A \to B$ leképezést *homomorfizmusnak* nevezünk, ha kompatibilis minden elemi operációval. A $\mathbb{B}$ faautomata az $\mathbb{A}$ *hányadosa*, ha létezik egy szürjektív homomorfizmus $\mathbb{A}$-ból $\mathbb{B}$-be. Ha $\mathbb{B}$ az $\mathbb{A}$ faautomata egy részautomatájának homomorf képe, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbb{A}$ *osztja* $\mathbb{B}$-t.

Tetszőleges $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomatában bármely $t \in T_\Sigma(X_m)$ fa egy $t^{\mathbb{A}} : A^m \to A$ *termfüggvényt* indukál a szokásos módon. A valódi fákkal indukálható termfüggvényeket *valódi termfüggvénynek* nevezzük. Ugyanígy minden $p \in T_{\Sigma,A}(X_m)$ polinomszimbólum is indukál egy $p^{\mathbb{A}} : A^m \to A^m$ *polinomfüggvényt*. A (valódi) polinomkörnyezetekkel indukálható polinomfüggvényeket $\mathbb{A}$ *(valódi) transzlációinak nevezzük.*

Így ha $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ egy faautomata, akkor bármely $t \in T_\Sigma$ fa egy konstans függvényt indukál. Ezt a konstans függvényt azonosítjuk az értékével. Az A állapothalmaz bármely A' részhalmaza meghatározza az $L_{\mathbb{A},A'} = \{t \in T_\Sigma : t^{\mathbb{A}} \in A'\}$ fanyelvet. Azt mondjuk, hogy az $L \subseteq T_\Sigma$ fanyelv *felismerhető* az $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomatában, ha $L = L_{\mathbb{A},A'}$ valamely $A' \subseteq A$ halmazra. Az L nyelvet *regulárisnak* nevezzük, ha felismerhető valamely véges faautomatában. Jól ismert, hogy minden L nyelvhez létezik egy (izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott) *minimális faautomata*, amiben L felismerhető és ami oszt minden olyan $\mathbb{B}$ faautomatát, amiben L szintén felismerhető.

Véges faautomaták egy nemüres osztályát *véges faautomaták pszeudovarietásának* nevezzük, ha zárt a direkt szorzatra, osztásra és átnevezésre. Véges faautomaták tetszőleges $\mathbf{K}$ osztályára létezik egy $\mathbf{K}$-t tartalmazó legszűkebb pszeudovarietás, melyet $\langle \mathbf{K} \rangle$ jelöl; azt mondjuk, hogy a $\mathbf{K}$ osztály *generálja* a $\langle \mathbf{K} \rangle$ pszeudovarietást. Ha $\mathbf{K} = \{\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n\}$ egy véges osztály, akkor $\langle \mathbf{K} \rangle$ helyett egyszerűen $\langle \mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_n \rangle$ szerepel.

Mivel logikánk változómentes fákon definiált, a definiálhatósági kérdéssel összefüggésben elegendő *összefüggő* faautomatákkal foglalkoznunk. Feltesszük, hogy az R rangtípus tartalmazza a 0-t és legalább egy pozitív egészet. Az $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomata *összefüggő része* az az (A', Σ) részautomatája, melynek $A' = \{t^{\mathbb{A}} : t \in T_\Sigma\}$ állapothalmaza az $\mathbb{A}$ faautomata elérhető állapotait tartalmazza. $\mathbb{A}$ *összefüggő*, ha minden állapota elérhető. Két összefüggő faautomata *összefüggő direkt szorzatát* direkt szorzatuk összefüggő részeként definiáljuk; az *összefüggő átnevezést* hasonlóképp definiáljuk. *Véges összefüggő faautomaták pszeudovarietásán* véges összefüggő faautomaták egy olyan $\mathbf{V}^c$ nemüres osztályát értjük, mely zárt az összefüggő direkt szorzatra, az összefüggő átnevezésre és a homomorf kép képzésére.

Ide kapcsolódik a literális varietások fogalma: reguláris fanyelvek egy nemüres $\mathcal{L}$ osztályát *literális fanyelv-varietásnak* nevezzük, ha zárt a halmazelméleti műveletekre, a hányadosképzésre és az inverz literálhomomorfizmusokra. A literális fanyelv-varietások és a véges összefüggő faautomaták pszeudovarietásai közt létezik egy Eilenberg kapcsolat [4]: az a leképezés, mely véges összefüggő faautomaták egy $\mathbf{V}^c$ pszeudovarietásához azt a $\mathcal{L}_{\mathbf{V}^c}$ nyelvosztályt rendeli, amit pontosan a $\mathbf{V}^c$ elemeiben felismerhető fanyelvek alkotnak, egy hálóizomorfizmust létesít a literális fanyelv-varietások és a véges összefüggő faautomaták pszeudovarietásai közt.

Az FTL($\mathcal{L}$) logika és Moore pszeudovarietások

A dolgozat első felében (2. fejezet) [9]-et követve bevezettük az elágazó, jövő idejű FTL($\mathcal{L}$) logikát fanyelvek tetszőleges $\mathcal{L}$ osztályára. Megadtuk ezen logikák egy algebrai karakterizációját abban az esetben, ha $\mathcal{L}$ reguláris fanyelvek egy olyan osztálya, mely teljesít egy bizonyos természetes feltételt. Ismertettük a tétel egy alkalmazását is és megadtunk egy másik, kétszemélyes játék alapú karakterizációját is az FTL($\mathcal{L}$) logikáknak, tetszőleges véges $\mathcal{L}$ nyelvosztályra.

Az FTL($\mathcal{L}$) logika

A [9]-ben bevezetett elágazó, jövő idejű FTL logika a következőképp definiált.

Szintaxis. Legyen Σ egy szignatúra. A Σ fölötti FTL-*formulák* halmaza a legszűkebb olyan halmaz, mely teljesíti az alábbi feltételeket:

1. Minden $\sigma \in \Sigma$-ra p_σ egy (0 mélységű) formula.
2. Ha φ_1 és φ_2 formulák (és maximális mélységük d), akkor $(\neg\varphi_1)$ és $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ is (d mélységű) formulák.
3. Ha Δ egy szignatúra, $L \subseteq T_\Delta$ egy fanyelv és minden $\delta \in \Delta$-ra φ_δ egy formula (ahol a φ_δ formulák maximális mélysége d), akkor $L(\delta \mapsto \varphi_\delta)_{\delta\in\Delta}$ is egy ($d+1$ mélységű) formula.

Szemantika. Legyen φ egy Σ fölötti formula és $t \in T_\Sigma$ egy fa. Azt mondjuk, hogy t *kielégíti* φ*-t*, amit $t \models \varphi$ jelöl, ha az alábbiak valamelyike teljesül:

1. $\varphi = p_\sigma$ valamely $\sigma \in \Sigma$-ra és $\mathrm{Root}(t) = \sigma$;
2. a logikai konnektívákat a szokásos módon kezeljük;
3. $\varphi = L(\delta \mapsto \varphi_\delta)_{\delta\in\Delta}$ és t-nek a $(\varphi_\delta)_{\delta\in\Delta}$ család által meghatározott *karakterisztikus fája*, $\widehat{t}$ az L fanyelvbe tartozik. Itt $\widehat{t}$ a t fa egy Δ-átcímkézése: t egy $\sigma \in \Sigma_n$-nel címkézett v csúcsát a $\delta \in \Delta_n$ szimbólumra címkézzük át, ha a következők valamelyike fennáll:
    - vagy $t|_v \models \varphi_\delta$ és δ a Δ_n halmaz első ilyen eleme;

- vagy $t|_v \not\models \bigvee\limits_{\delta' \in \Delta_n} \varphi_{\delta'}$ és δ a Δ_n halmaz utolsó eleme.

(Itt feltettük, hogy minden szignatúra egy rögzített lexikografikus rendezéssel rendelkezik. Ugyanakkor [9]-ből ismert, hogy a konkrét rendezés nem lényeges.)

A φ FTL-formula az $L_\varphi = \{t \in T_\Sigma : t \models \varphi\}$ fanyelvet definiálja.

Ha $\mathcal{L}$ fanyelvek egy osztálya, akkor FTL($\mathcal{L}$) jelöli azon FTL-formulák osztályát, melyeknek minden $L(\delta \mapsto \varphi_\delta)_{\delta \in \Delta}$ alakú részformulájára igaz, hogy $L \in \mathcal{L}$. Az FTL($\mathcal{L}$)-ben definiálható fanyalvek osztályát $\mathbf{FTL}(\mathcal{L})$ jelöli.

Tetszőleges Σ szignatúrára és $n \geq 0$ ábécére definiáljuk az $\equiv^n_{\mathcal{L}}$ ekvivalenciarelációt a T_Σ halmazon: $s \equiv^n_{\mathcal{L}} t$ pontosan akkor áll fenn az s és t fák között, ha s és t a maximálisan n mélységű FTL($\mathcal{L}$)-formulák közül pontosan ugyanazokat elégítik ki.

[9]-ből ismert, hogy az **FTL** operátor megőrzi a regularitást és reguláris fanyelvek osztályain lezárási operátor. Továbbá reguláris fanyelvek tetszőleges $\mathcal{L}$ osztályára az $\mathbf{FTL}(\mathcal{L})$ osztály zárt a halmazelméleti műveletekre és az inverz literálhomomorfizmusokra. Továbbá, $\mathbf{FTL}(\mathcal{L})$ pontosan akkor literális fanyelv-varietás, ha $\mathcal{L}$ bármely elemének bármely hányadosa $\mathbf{FTL}(\mathcal{L})$-beli.

Faautomaták szorzatai

Legyenek $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ és $\mathbb{B} = (B, \Delta)$ faautomaták, γ pedig függvények egy $(\gamma_n)_{n \in R}$ családja, ahol minden $n \in R$ esetén $\gamma_n : A^n \times \Sigma \to \Delta_n$. Ekkor az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ faautomaták γ által meghatározott *kaszkád szorzata* az a $\mathbb{A} \times_\gamma \mathbb{B} = (A \times B, \Sigma)$ faautomata, melyre

$$\sigma^{\mathbb{A} \times_\gamma \mathbb{B}}\big((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\big) \quad = \quad \big(\sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n), \delta^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_n)\big),$$

ahol $\delta = \gamma_n(a_1, \ldots, a_n, \sigma)$ minden $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in R$ és $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$ esetén.

A fenti $\mathbb{A} \times_\gamma \mathbb{B}$ kaszkád szorzatot *Moore szorzatnak* nevezzük, ha valamely $\alpha : A \times \Sigma \to \Delta$ rangtartó leképezésre (vagyis melyre minden $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in R$ és $a \in A$ esetén $\alpha(a, \sigma) \in \Delta_n$ fennáll) igaz, hogy

$$\gamma_n(a_1, \ldots, a_n, \sigma) \quad = \quad \alpha(\sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n), \sigma)$$

tetszőleges $\sigma \in \Sigma_n$, $n \in R$ és $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén. A fenti Moore szorzatot *szigorú Moore szorzatnak* nevezzük, ha valamely $\beta : A \times R \to \Delta$ leképezésre $\alpha(a, \sigma) = \beta(a, n)$ teljesül minden $a \in A$, $n \in R$ és $\sigma \in \Sigma_n$ esetén.

Hasonlóan az összefüggő direkt szorzathoz, az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ faautomaták γ által meghatározott $\mathbb{A} \times_\gamma \mathbb{B}$ *összefüggő kaszkád szorzata* a γ által meghatározott kaszkád szorzatuk összefüggő része. Az összefüggő Moore és összefüggő szigorú Moore szorzatokat analóg módon definiáljuk.

Ha $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ véges faautomaták pszeudovarietásai, jelölje $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ véges faautomaták azon pszeudovarietását, melyet az $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ alakú direkt szorzatok generálnak, ahol $\mathbb{A} \in \mathbf{V}$ és $\mathbb{B} \in \mathbf{W}$. Hasonlóképp, jelölje $\mathbf{V} \times_M \mathbf{W}$, $\mathbf{V} \times_s \mathbf{W}$ és $\mathbf{V} \times_c \mathbf{W}$ rendre azokat a pszeudovarietásokat, melyeket az $\mathbb{A} \times_\alpha \mathbb{B}$ alakú Moore, szigorú Moore és kaszkád szorzatok generálnak. Ezen fogalmakat kiterjesztjük véges összefüggő faautomatákra is: ha $\mathbf{V}^c$ és $\mathbf{W}^c$ véges összefüggő faautomaták pszeudovarietásai, jelölje $\mathbf{V}^c \times \mathbf{W}^c$ a véges összefüggő faautomaták azon pszeudovarietását, melyet az $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ alakú összefüggő direkt szorzatok generálnak, ahol $\mathbb{A} \in \mathbf{V}^c$ és $\mathbb{B} \in \mathbf{W}^c$. A $\mathbf{V}^c \times_M \mathbf{W}^c$, $\mathbf{V}^c \times_s \mathbf{W}^c$ és $\mathbf{V}^c \times_c \mathbf{W}^c$ jelöléseket hasonlóképp definiáljuk.

Véges faautomaták tetszőleges $\mathbf{K}$ osztályára jelölje $\langle \mathbf{K} \rangle_s$, $\langle \mathbf{K} \rangle_M$, $\langle \mathbf{K} \rangle_c$ rendre a véges faautomaták azon legszűkebb, $\mathbf{K}$-t tartalmazó pszeudovarietását, mely zárt a szigorú Moore, Moore és a kaszkád szorzatra. Ezeket az osztályokat *szigorú Moore pszeudovarietásoknak*, *Moore pszeudovarietásoknak* és *kaszkád pszeudovarietásoknak* nevezzük.

Hasonlóképp, ha $\mathbf{K}^c$ véges összefüggő faautomaták egy osztálya, jelölje $\langle \mathbf{K}^c \rangle_s$, $\langle \mathbf{K}^c \rangle_M$, $\langle \mathbf{K}^c \rangle_c$ rendre a véges összefüggő faautomaták azon legszűkebb, $\mathbf{K}$-t tartalmazó pszeudovarietását, mely zárt a szigorú Moore, Moore és a kaszkád szorzatra. Ezeket az osztályokat *összefüggő szigorú Moore pszeudovarietásoknak*, *összefüggő Moore pszeudovarietásoknak* és *összefüggő kaszkád pszeudovarietásoknak* nevezzük.

Definit faautomaták

Az $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomatát *k-definitnek* nevezzük valamely k-ra, ha minden p és q ΣA-polinomszimbólumra, melyek k mélységig megegyeznek, $p^{\mathbb{A}} = q^{\mathbb{A}}$ fennáll. Egy faautomata *definit*, ha valamely k-ra k-definit. A véges k-definit faautomaták osztályát $\mathbf{D}_k$ jelöli, a véges definit faautomaták osztályát pedig $\mathbf{D}$. Ha $\mathbf{V}$ véges faautomaták egy osztálya, akkor $\mathbf{V}^c$ jelöli a $\mathbf{V}$-beli faautomaták összefüggő részei által alkotott osztályt. Ekkor $\mathbf{D}_k^c$ a véges összefüggő k-definit faautomaták osztálya és $\mathbf{D}^c$ a véges összefüggő definit faautomaták osztálya.

A Bool szignatúra minden $n \in R$ aritásra pontosan két szimbólumot tartalmaz, a $\uparrow_n$ és a $\downarrow_n$ szimbólumokat. A $\mathbb{D}_0 = (\{0, 1\}, \mathrm{Bool})$ faautomata a következő: minden $n \in R$-re, $\uparrow_n^{\mathbb{D}_0}$ a konstans 1 értékű függvény, $\downarrow_n^{\mathbb{D}_0}$ pedig a konstans 0 értékű függvény.

[6]-ból ismert, hogy $\mathbf{D} = \langle \mathbb{D}_0 \rangle_c$ a véges faautomatáknak egy kaszkád pszeudovarietása, melyet $\mathbb{D}_0$ generál, vagyis $\langle \mathbf{D}_1 \rangle_c = \mathbf{D}$. Viszont a véges 1-definit faautomaták osztálya zárt a Moore szorzatra:

2.1.11. ÁLLÍTÁS. $\mathbf{D}_1$ véges faautomaták Moore pszeudovarietása.

Összefüggés a szorzatok között

Megmutattunk néhány összefüggést a kaszkád, Moore és szigorú Moore szorzatok között.

2.2.15. KÖVETKEZMÉNY. Véges faautomaták tetszőleges $\mathbf{V}$ Moore pszeudovarietására igaz, hogy

$$\langle \mathbf{D}_1 \cup \mathbf{V} \rangle_M = \mathbf{D}_1 \times \mathbf{V}.$$

2.2.17. KÖVETKEZMÉNY. Véges faautomaták tetszőleges $\mathbf{V}$ pszeudovarietására igaz, hogy

$$\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V} \quad \text{maga után vonja, hogy} \quad \langle \mathbf{V} \rangle_M = \langle \mathbf{V} \rangle_s.$$

2.2.28. KÖVETKEZMÉNY. Véges faautomaták tetszőleges $\mathbf{K}$ osztályára igaz, hogy

$$\langle \mathbf{D}_2 \cup \mathbf{K} \rangle_M \quad = \quad \langle \mathbf{D} \cup \mathbf{K} \rangle_M \; = \; \langle \mathbf{D} \cup \mathbf{K} \rangle_c.$$

2.2.29. KÖVETKEZMÉNY. Az alábbi feltételek véges faautomaták tetszőleges $\mathbf{V}$ osztályára ekvivalensek:

1. $\mathbf{V}$ egy, a $\mathbf{D}_2$ osztályt tartalmazó Moore pszeudovarietás.
2. $\mathbf{V}$ egy, a $\mathbf{D}$ osztályt tartalmazó Moore pszeudovarietás.
3. $\mathbf{V}$ egy, a $\mathbf{D}$ osztályt tartalmazó kaszkád pszeudovarietás.

Kifejezőerő

[9]-et követve véges összefüggő faautomaták tetszőleges $\mathbf{K}^c$ osztályához is társítottunk egy, FTL($\mathbf{K}^c$)-vel jelölt logikát a következőképpen. Jelölje $\mathcal{L}_{\mathbf{K}^c}$ a $\mathbf{K}^c$ elemeiben felismerhető nyelvek osztályát. Ekkor FTL($\mathbf{K}^c$) jelöli a FTL($\mathcal{L}_{\mathbf{K}^c}$) logikát, $\mathbf{FTL}(\mathbf{K}^c)$ pedig a $\mathbf{FTL}(\mathcal{L}_{\mathbf{K}^c})$ nyelvosztályt. [9] szerint reguláris fanyelvek tetszőleges $\mathcal{L}$ osztályára $\mathbf{FTL}(\mathcal{L})$ pontosan akkor literális fanyelv-varietás, ha $\mathbf{FTL}(\mathcal{L}) = \mathbf{FTL}(\mathbf{K}^c)$ véges összefüggő faautomaták valamely $\mathbf{K}^c$ osztályára.

A következő karakterizációs tételt igazoltuk:

2.3.4. TÉTEL. Véges összefüggő faautomaták tetszőleges $\mathbf{K}^c$ osztálya esetén egy L fanyelv pontosan akkor $\mathbf{FTL}(\mathbf{K}^c)$-beli, ha reguláris és minimális faautomatája benne van a $\langle \mathbf{D}_1^c \cup \mathbf{K}^c \rangle_M$ osztályban, vagy ezzel ekvivalensen, ha L felismerhető $\langle \mathbf{D}_1^c \cup \mathbf{K}^c \rangle_M$ valamely elemében.

2.3.5. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $\mathcal{L}$ reguláris fanyelvek egy olyan osztálya, melyre bármely $\mathcal{L}$-beli nyelv bármely hányadosa $\mathbf{FTL}(\mathcal{L})$-beli. Ekkor egy L fanyelv pontosan akkor esik $\mathbf{FTL}(\mathcal{L})$-be, ha minimális faautomatája benne van a véges összefüggő faautomaták azon legszűkebb (szigorú) Moore pszeudovarietásában, mely tartalmazza $\mathbf{D}_1^c$-t és az $\mathcal{L}$-beli nyelvek minimális faautomatáit.

2.3.6. KÖVETKEZMÉNY. Véges összefüggő faautomaták tetszőleges $\mathbf{V}^c$ Moore pszeudovarietására, mely tartalmazza $\mathbf{D}_1^c$-t, fennáll, hogy $\mathcal{L}_{\mathbf{V}^c} = \mathbf{FTL}(\mathbf{V}^c)$. Továbbá, a $\mathbf{V}^c \mapsto \mathbf{FTL}(\mathbf{V}^c)$ leképezés egy hálóizomorfizmust alkot a $\mathbf{D}_1$-et tartalmazó összefüggő Moore pszeudovarietások hálója és azon $\mathcal{V}$ fanyelv-varietások hálója közt, melyekre $\mathbf{FTL}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Alkalmazás

Faautomaták egy $\mathcal{P}$ tulajdonságát *Moore tulajdonságnak* nevezzük, ha a $\mathcal{P}$-vel rendelkező véges faautomaták Moore pszeudovarietást alkotnak.

A $\mathbb{A} = (\Sigma, A)$ faautomatát *kommutatívnak* nevezzük, ha benne fennáll minden

$$\sigma^{\mathbb{A}}(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad \sigma^{\mathbb{A}}(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

egyenlőség, ahol $\sigma \in \Sigma_n$, $0 < n \in R$, és π a $\{1, \ldots, n\}$ halmaz tetszőleges permutációja.

Az $\mathbb{A} = (\Sigma, A)$ faautomata *dadogás-invariáns*, ha

$$\sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_{n-1}, \sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \quad = \quad \sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)$$

minden $\sigma \in \Sigma_n$, $n > 0$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén.

Ha $\mathbb{A}$ egy Σ-faautomata, $\preceq_{\mathbb{A}}$ jelöli $\mathbb{A}$ *elérhetőségi relációját*, vagyis $a \preceq_{\mathbb{A}} b$ pontosan akkor áll fenn, ha valamely p ΣA-polinomkörnyezetre $p^{\mathbb{A}}(a) = b$. Ez a reláció természetesen reflexív és tranzitív. A $\sim_{\mathbb{A}}$ reláció pedig akkor áll fenn az a és a b elemek közt, ha $a \preceq_{\mathbb{A}} b$ és $b \preceq_{\mathbb{A}} a$ is teljesül; így $\sim_{\mathbb{A}}$ egy ekvivalenciareláció.

Az $\mathbb{A}$ faautomata *monoton*, ha $\preceq_{\mathbb{A}}$ részbenrendezés.

Az $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomatát *maximális elemfüggőnek* nevezzük, ha bármely $\sigma \in \Sigma_n$ szimbólumra és $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a'_n \in A$ állapotokra, ha $a_n \preceq_{\mathbb{A}} a_i$ és $a'_n \preceq_{\mathbb{A}} a_j$ fennáll valamely $1 \leq i, j \leq n-1$ indexekre, akkor $\sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n)$.

Az $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomatát *komponensfüggőnek* nevezzük, ha bármely $\sigma \in \Sigma_n$ szimbólumra és $a_1 \sim_{\mathbb{A}} a'_1, \ldots, a_n \sim_{\mathbb{A}} a'_n \in A$ állapotokra teljesül, hogy $\sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \sigma^{\mathbb{A}}(a'_1, \ldots, a'_n)$.

Az $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ faautomatát *komponensenként egyedinek* nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ állapotokra és p, q valódi ΣA-polinomkörnyezetekre $\mathrm{Root}(p) = \mathrm{Root}(q)$, $p^{\mathbb{A}}(a) = b$ és $q^{\mathbb{A}}(b) = a$ egyidejű teljesülése maga után vonja, hogy $a = b$.

Igazoltuk, hogy a fenti tulajdonságok mindegyike Moore tulajdonság; jelölje **Com**, **Stu**, **Mon**, **MaxDep**, **CompDep** és **CompUnique** rendre a véges kommutatív, dadogás-invariáns, monoton, maximális elemfüggő, komponensfüggő és komponensenként egyedi faautomatákat. Tehát ezen osztályok mindegyike Moore pszeudovarietás.

A következők is fennállnak:

2.4.18. ÁLLÍTÁS.

$$\mathbf{CompDep} \cap \mathbf{Com} \cap \mathbf{MaxDep} \ \subseteq \ \mathbf{CompUnique}.$$

2.4.39. KÖVETKEZMÉNY.

$$\mathbf{Mon} \times \mathbf{D}_1 \quad = \quad \mathbf{CompDep} \cap \mathbf{CompUnique}.$$

Jelölje $L_{\mathrm{EF}^+} \subseteq T_{\mathrm{Bool}}$ azon T_{Bool}-beli fák nyelvét, melyeknek van legalább egy $\{\uparrow_n : n \in R\}$-beli szimbólummal címkézett nem-gyökér csúcsuk. Jelölje továbbá $L_{\mathrm{EF}^*} \subseteq T_{\mathrm{Bool}}$ azon T_{Bool}-beli fák nyelvét, melyeknek van legalább egy $\{\uparrow_n : n \in R\}$-beli szimbólummal címkézett csúcsuk.

Tetszőleges Σ szignatúra és Σ fölötti rögzített φ formula esetén ha a $(\varphi_\delta)_{\delta \in \mathrm{Bool}}$ formulacsaládot úgy definiáljuk, hogy $\varphi_{\uparrow_n} = \varphi$ minden $n \in R$-re fennálljon, akkor $t \models L_{\mathrm{EF}^+}(\delta \mapsto \varphi_\delta)_{\delta \in \mathrm{Bool}}$ pontosan akkor teljesül, ha t-nek valamely valódi részfája kielégíti φ-t. Hasonlóan, $t \models L_{\mathrm{EF}^*}(\delta \mapsto \varphi_\delta)_{\delta \in \mathrm{Bool}}$ pontosan akkor teljesül, ha t-nek valamely részfája kielégíti φ-t. Ily módon az ezekhez a fanyelvekhez társított modális operátorok megfelelnek a CTL logika szigorú, illetve megengedő EF modalitásának [32].

Jelöljék $\mathbb{E}^+_{\mathrm{EF}}$ és $\mathbb{E}^*_{\mathrm{EF}}$ rendre az L_{EF^+} és az L_{EF^*} fanyelvek minimális faautomatáit. A korábban bevezetett tulajdonságok segítségével karakterizáltuk az $\langle \mathbb{E}^+_{\mathrm{EF}} \rangle_M$, $\langle \mathbb{E}^*_{\mathrm{EF}} \rangle_M$, $\langle \mathbb{E}^+_{\mathrm{EF}}, \mathbb{D}_0 \rangle_M$ és $\langle \mathbb{E}^*_{\mathrm{EF}}, \mathbb{D}_0 \rangle_M$ összefüggő Moore pszeudovarietásokat:

2.4.30. TÉTEL.

$$\langle \mathbb{E}^{+}_{\mathrm{EF}} \rangle_M \quad = \quad \mathbf{Mon}^c \cap \mathbf{Com}^c \cap \mathbf{MaxDep}^c.$$

2.4.36. TÉTEL.

$$\langle \mathbb{E}^{*}_{\mathrm{EF}} \rangle_M \quad = \quad \mathbf{Mon}^c \cap \mathbf{Com}^c \cap \mathbf{MaxDep}^c \cap \mathbf{Stu}^c = \langle \mathbb{E}^{+}_{\mathrm{EF}} \rangle_M \cap \mathbf{Stu}^c.$$

2.4.40. TÉTEL. Véges faautomaták tetszőleges $\mathbf{V}$ pszeudovarietására

$$\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{Mon} \times \mathbf{D}_1 \quad \text{maga után vonja, hogy} \quad (\mathbf{Mon} \cap \mathbf{V}) \times \mathbf{D}_1 = \mathbf{V}.$$

A fenti eredmények felhasználásával effektíven karakterizáltuk az $\langle \mathbb{E}^{+}_{\mathrm{EF}}, \mathbb{D}_0 \rangle_M$ és $\langle \mathbb{E}^{*}_{\mathrm{EF}}, \mathbb{D}_0 \rangle_M$ osztályokat is:

2.4.41. KÖVETKEZMÉNY. Az alábbi egyenlőségek teljesülnek:

i) $\langle \mathbb{E}^{+}_{\mathrm{EF}}, \mathbb{D}_0 \rangle_M = \langle \mathbb{E}^{+}_{\mathrm{EF}} \rangle_M \times \mathbf{D}_1^c = \mathbf{CompDep}^c \cap \mathbf{Com}^c \cap \mathbf{MaxDep}^c$;

ii) $\langle \mathbb{E}^{*}_{\mathrm{EF}}, \mathbb{D}_0 \rangle_M = \langle \mathbb{E}^{*}_{\mathrm{EF}} \rangle_M \times \mathbf{D}_1^c = \mathbf{CompDep}^c \cap \mathbf{Com}^c \cap \mathbf{MaxDep}^c \cap \mathbf{Stu}^c$.

Ennek következményeképp karakterizáltuk a CTL logika két szintaktikus töredékét is:

2.4.42. KÖVETKEZMÉNY. Az alábbiak tetszőleges L fanyelvre fennállnak:

i) L pontosan akkor definiálható CTL(EF$^+$)-ben, ha minimális faautomatája a $\mathbf{CompDep}^c \cap \mathbf{Com}^c \cap \mathbf{MaxDep}^c$ osztályba tartozik;

ii) L pontosan akkor definiálható CTL(EF*)-ben, ha minimális faautomatája a $\mathbf{CompDep}^c \cap \mathbf{Com}^c \cap \mathbf{MaxDep}^c \cap \mathbf{Stu}^c$ osztályba tartozik.

Mivel a fenti Moore pszeudovarietások mindegyike eldönthető, sőt polinom időben eldönthető, így az a kérdés, hogy egy minimális faautomatájával megadott L reguláris fanyelv definiálható-e a CTL(EF$^+$) vagy a CTL(EF*) logikában, szintén polinom időben eldönthető. Ez az eredmény a CTL(EF$^+$) esetére ismert volt [3].

Ehrenfeucht-Fraïssé típusú játékok

Definiáltuk az úgynevezett n-fordulós $\mathcal{L}$-játékot fanyelvek tetszőleges $\mathcal{L}$ osztályára és $n \geq 0$ számra, és megmutattuk kapcsolatát az FTL($\mathcal{L}$) logikával. A játékot két játékos, Spoiler és Duplicator játssza, változómentes fák egy (s, t) párján.

Legyen $\mathcal{L}$ fanyelvek egy osztálya, $n \geq 0$ egy egész szám, Σ egy szignatúra és legyenek $t_0, t_1 \in T_\Sigma$ fák. A (t_0, t_1) *páron játszott n-fordulós $\mathcal{L}$-játék* szabályai a következők:

1. Ha $\mathrm{Root}(t_0) \neq \mathrm{Root}(t_1)$, Spoiler nyer. Egyébként a 2. lépés következik.

2. Ha $n = 0$, Duplicator nyer. Egyébként a 3. lépés következik.

3. Spoiler választ valamely Δ szignatúra feletti $L \in \mathcal{L}$ fanyelvet, egy $i \in \{0,1\}$ indexet, a t_i fa egy $\widehat{t_i} \in L$ átcímkézését és a t_j fa egy $\widehat{t_j} \notin L$ átcímkézését, ahol $j = 1 - i$. Ha ezt nem tudja megtenni, Duplicator nyer, egyébként a 4. lépés következik.

4. Duplicator kiválasztja a (t_0, t_1) pár két csúcsát, x-et és y-t, melyek különböző címkével rendelkeznek a $\widehat{t_i}$ fákban. Ha ezt nem tudja megtenni, Spoiler nyer. Egyébként a két játékos egy $(n-1)$-fordulós $\mathcal{L}$-játékot játszik az x ill. y gyökerű részfákon. Bármelyikük is nyeri az $(n-1)$-fordulós játékot ezeken a fákon, az nyeri az eredeti játékot is.

Természetesen fanyelvek bármilyen $\mathcal{L}$ osztályára, $n \geq 0$ számra és fák (s,t) párjára valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája; azt mondjuk, hogy ez a játékos *megnyeri* a játékot. Jelölje $s \sim_{\mathcal{L}}^n t$ azt, hogy Duplicator megnyeri az n-fordulós $\mathcal{L}$-játékot az (s,t) páron.

A következő összefüggést igazoltuk $\equiv_{\mathcal{L}}^n$ és $\sim_{\mathcal{L}}^n$ között:

2.5.3. KÖVETKEZMÉNY. Fanyelvek tetszőleges $\mathcal{L}$ osztályára és $n \geq 0$ egészre a $\sim_{\mathcal{L}}^n$ és a $\equiv_{\mathcal{L}}^n$ relációk megegyeznek.

2.5.4. KÖVETKEZMÉNY. A következők ekvivalensek fanyelvek tetszőleges véges $\mathcal{L}$ osztályára és L fanyelvre:

i) L definiálható FTL($\mathcal{L}$)-ben;

ii) létezik egy olyan $n \geq 0$ egész, amire valahányszor $s \in L$ és $t \notin L$ fák, Spoiler megnyeri az n-fordulós $\mathcal{L}$-játékot az (s,t) páron.

Aperiodicitás

A dolgozat második felében (3. fejezet) véges faautomatákra vezettünk be és vizsgáltunk aperiodicitás-fogalmakat.

Az n-aperiodicitás

Legyen $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ egy véges faautomata. Kiterjesztve a termfüggvények fogalmát azt mondjuk, hogy ΣX_n-fák egy $\underline{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ m-ese egy (vektor-értékű) $\underline{t}^{\mathbb{A}} = \langle t_1^{\mathbb{A}}, \ldots, t_m^{\mathbb{A}} \rangle : A^n \to A^m$ termfüggvényt indukál. $\underline{t}^{\mathbb{A}}$-t valódinak nevezzük, ha mindegyik $t_i^{\mathbb{A}}$ valódi termfüggvény.

Ekkor minden $n \geq 1$-re az $A^n \to A^n$ valódi termfüggvények a kompozíció művelettel félcsoportot alkotnak. Ezt a félcsoportot $S_n(\mathbb{A})$ jelöli; természetesen ha $\mathbb{A}$ véges, $S_n(\mathbb{A})$ is véges. Az $S_1(\mathbb{A})$ félcsoport azon részfélcsoportját, amit a valódi környezetekkel indukálható termfüggvények alkotnak, $C(\mathbb{A})$ jelöli, amennyiben a valódi környezetek halmaza nemüres. Ellenkező esetben $C(\mathbb{A})$ legyen egy triviális félcsoport.

Egy S véges félcsoportot aperiodikusnak nevezünk, ha van egy olyan $k > 0$ egész, amire az $s^k = s^{k+1}$ egyenlőség minden $s \in S$ elemre teljesül. Az $\mathbb{A}$ véges faautomatát *n-aperiodikusnak* nevezzük az $n > 0$ egészre, ha az $S_n(\mathbb{A})$ félcsoport aperiodikus. $\mathbb{A}$ *erősen* *aperiodikus*, ha minden $n > 0$-ra n-aperiodikus; végül, $\mathbb{A}$ *környezet-aperiodikus*, ha a $C(\mathbb{A})$ félcsoport aperiodikus.

Az erős aperiodicitás következő jellemzését igazoltuk:

3.1.11. KÖVETKEZMÉNY. Az $\mathbb{A}$ véges faautomata pontosan akkor erősen aperiodikus, ha minden $n > 0$ és $f : A^n \to A^n$ valódi termfüggvény esetén f-nek legfeljebb egy fixpontja van.

Általánosított kaszkád szorzat

Legyenek $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ és $\mathbb{B} = (B, \Delta)$ faautomaták, γ pedig függvények egy $(\gamma_n)_{n\in R}$ családja, ahol minden $n \in R$-re, γ_n az $A^n \times \Sigma_n$ halmazt képzi le a valódi ΔX_n-fák halmazára. Ekkor az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ faautomaták γ által meghatározott *általánosított kaszkád szorzata* az az $\mathbb{A} \times_\gamma \mathbb{B} = (A \times B, \Sigma)$ faautomata, melyben a

$$\sigma^{\mathbb{A}\times_\gamma\mathbb{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \quad = \quad (\sigma^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n), t^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_n))$$

teljesül minden $\sigma \in \Sigma_n$ és $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$ esetén, ahol $t = \gamma_n(a_1, \ldots, a_n, \sigma)$.

Véges faautomaták egy nemüres osztályát *véges faautomaták általánosított kaszkád pszeudovarietásának* nevezzük, ha zárt a részautomata, homomorf kép, átnevezés és az általánosított kaszkád szorzat képzésére.

Az $\mathbf{SAper}_n$ osztályok következő algebrai zártsági tulajdonságát láttuk be:

3.2.8. TÉTEL. Az $\mathbf{SAper}_n$ osztály tetszőleges $n > 0$-ra véges faautomaták általánosított kaszkád pszeudovarietása, így az $\mathbf{SAper}$ osztály is az.

3.2.9. TÉTEL. A $\mathbf{CAper}$ osztály véges faautomaták kaszkád pszeudovarietása.

Valódi tartalmazások, komplexitás

Az aperiodicitási osztályok között a

$$\mathbf{CAper} \supseteq \mathbf{SAper}_1 \supseteq \mathbf{SAper}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{SAper} \supseteq \mathbf{D}$$

tartalmazások fennállnak. Igazoltuk, hogy ez a hierarchia összeomlik, ha $R = \{0, 1\}$ vagy $R = \{1\}$.

3.3.1. ÁLLÍTÁS. Ha $R = \{1\}$ vagy $R = \{0, 1\}$, akkor

$$\mathbf{CAper} = \mathbf{SAper}_1 \supset \mathbf{SAper}_2 = \mathbf{SAper} = \mathbf{D}.$$

Ugyanakkor, ha R tartalmaz egy $k > 1$ egész számot, akkor a hierarchia valódi:

3.3.2. ÁLLÍTÁS. Ha R tartalmaz egy $k > 1$ egészet, akkor $\mathbf{SAper}_1 \subset \mathbf{CAper}$.

3.3.3. ÁLLÍTÁS. Ha R tartalmaz egy $k > 1$ egészet, akkor minden $n > 1$-re létezik olyan $(n-1)$-aperiodikus véges faautomata, mely nem n-aperiodikus.

3.3.4. ÁLLÍTÁS. Ha R tartalmaz egy $k > 1$ egészet, akkor $\mathbf{D} \subset \mathbf{SAper}$.

Vizsgáltuk az **SAper** és az $\mathbf{SAper}_n$ osztályok eldöntési kérdésének bonyolultságát is. A következő eredményeket kaptuk:

3.4.3. TÉTEL. Az a kérdés, hogy egy véges faautomata erősen aperiodikus-e, polinom időben eldönthető.

3.4.4. TÉTEL. Bármely rögzített n-re PSPACE-nehéz annak eldöntése, hogy egy adott véges faautomata n-aperiodikus-e.

Aperiodicitás és logika

Vizsgáltuk az n-aperiodicitás és a CTL-beli, valamint az elsőrendben való definiálhatóság kapcsolatát. A következő eredményeket kaptuk:

1. Ha egy fanyelv definiálható CTL-ben, akkor minimális faautomatája 1-aperiodikus.
2. Létezik CTL-ben definiálható nyelv, melynek minimális faautomatája nem 2-aperiodikus.
3. Létezik FO($<$)-ben definiálható fanyelv, melynek minimális automatája nem 1-aperiodikus.
4. Létezik reguláris fanyelv, mely nem definiálható FO($<, S_i$)-ben, de aminek minimális automatája 1-aperiodikus.

Aperiodicitás polinomokra

Bevezettük az n-aperiodicitás egy módosított változatát is. Ha $\mathbb{A} = (A, \Sigma)$ egy véges faautomata, akkor ΣAX_n-polinomszimbólumok tetszőleges $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ m-ese indukál egy $\underline{p}^{\mathbb{A}} = \langle p_1^{\mathbb{A}}, \ldots, p_m^{\mathbb{A}} \rangle : A^n \to A^m$ polinomfüggvényt. Ha minden p_i valódi, $\underline{p}^{\mathbb{A}}$-t is valódinak nevezzük. Tetszőleges n-re az $A^n \to A^n$ valódi polinomfüggvények is egy félcsoportot alkotnak a kompozíció művelettel. Ezt a félcsoportot $S_n^{(p)}(\mathbb{A})$ jelöli; a $\mathbf{SAper}_n^{(p)}$ osztály azokat a véges $\mathbb{A}$ faautomatákat tartalmazza, melyekre $S_n^{(p)}(\mathbb{A})$ aperiodikus félcsoport. Az $\mathbf{SAper}^{(p)}$ és a $\mathbf{CAper}^{(p)}$ osztályokat hasonlóan definiáljuk.

Igazoltuk, hogy az ebben a polinom értelemben vett aperiodicitási hierarchia tetszőleges rangtípus esetén összeomlik:

3.7.4. TÉTEL.

$$\mathbf{D} = \mathbf{SAper}^{(p)} = \mathbf{SAper}_2^{(p)} \subset \mathbf{SAper}_1^{(p)} \subset \mathbf{CAper}^{(p)}.$$

Mivel $\mathbf{D}$ ismerten eldönthető polinom időben, ez a karakterizáció az $\mathbf{SAper}^{(p)}$ osztály egy effektív karakterizációját adja.

Végül, vizsgáltuk az $\mathbf{SAper}_1^{(p)}$ osztály kapcsolatát a többi aperiodicitás osztállyal:

3.7.7. KÖVETKEZMÉNY. Az $\mathbf{SAper}_1^{(p)}$ osztály nemtriviálisan metszi az **SAper** osztályt és minden $n \geq 2$-re az $\mathbf{SAper}_n$ osztályt is.

Hivatkozások

[1] M. Ben-Ari, Z. Manna and A. Pnueli. The temporal logic of branching time. *Acta Informatica*, 20:207–226, 1983.

[2] M. Benedikt and L. Segoufin. Regular tree languages definable in FO. In *STACS 2005*, LNCS 2404, pages 327–339, Springer-Verlag, 2005.

[3] M. Bojańczyk and I. Walukiewicz. Characterising EF and EX tree logics. In *proc. CONCUR 2004*, LNCS 3170, pages 131–145, Springer-Verlag, 2004.

[4] S. Eilenberg. *Automata, Languages, and Machines*, vol. A and B, Academic Press, 1974 and 1976.

[5] E. A. Emerson and J. Y. Halpern.„Sometimes" and „not never" revisited: on branching versus linear time temporal logic. *J. Assoc. Comput. Mach.* 33:151–178, 1986.

[6] Z. Ésik. Definite tree automata and their cascade compositions. *Publ. Math.*, 48:243–262, 1996.

[7] Z. Ésik. A variety theorem for trees and theories. *Publ. Math.*, 54:711–762, 1999.

[8] Z. Ésik. An algebraic characterization of temporal logics on finite trees. Parts I, II, III. In *1st International Conference on Algebraic Informatics, 2005*, pages 53–77, 79–99, 101–110, Aristotle Univ. Thessaloniki, Thessaloniki, 2005.

[9] Z. Ésik. Characterizing CTL-like logics on finite trees. *Theoretical Computer Science*, 356:136–152, 2006.

[10] Z. Ésik and F. Gécseg. Type independent varieties and metric equivalence of tree automata. *Fundamenta Informaticae*, 2:205-216, 1986.

[11] Z. Ésik and Sz. Iván. Aperiodicity in tree automata. In *2nd International Conference on Algebraic Informatics, 2007*, LNCS 4728, Springer, p. 189–207, 2007.

[12] Z. Ésik and Sz. Iván. Products of tree automata with an application to temporal logic. *Fundamenta Informaticae* 82:61–82, 2008. (to appear)

[13] Z. Ésik and Sz. Iván. Some varieties of finite tree automata related to restricted temporal logic. *Fundamenta Informaticae* 82:83–103, 2008. (to appear)

[14] Z. Ésik and P. Weil. On logically defined recognizable tree languages. In *FST&TCS 03, Mumbai*, LNCS 2914, pages 195–206, Springer-Verlag, 2003.

[15] Z. Ésik and P. Weil. Algebraic recognizability of regular tree languages. *Theoret. Comput. Sci.*, 340:291–321, 2005.

[16] F. Gécseg and B. Imreh. On isomorphic representations of monotone tree and nondeterministic tree automata. *Words, Semigroups and Transductions 2001*, pages 141–154, 2001.

[17] F. Gécseg and M. Steinby. *Tree Automata.* Akadémiai Kiadó, 1984.

[18] T. Hafer and W. Thomas. Computation tree logic CTL* and path quantifiers in the monadic theory of the binary tree. In *ICALP 1987, Karlsruhe*, pages 269–279, LNCS 267, Springer-Verlag, 1987.

[19] U. Heuter. Definite tree languages. *Bulletin of the EATCS*, 35:137–142. 1988.

[20] U. Heuter. First-order properties of trees, star-free expressions, and aperiodicity. *RAIRO Inform. Théor. Appl.*, 25:125–145, 1991.

[21] J. A. Kamp. Tense logic and the theory of linear order. Ph. D. Thesis, UCLA, 1968.

[22] L. Libkin. *Elements of finite model theory.* Springer, 2004.

[23] R. McNaughton and S. Papert. *Counter-Free Automata.* MIT Press, 1971.

[24] D. Perrin and J.-E. Pin. First-order logic and star-free sets. *J. Comput. System Sci.*, 32:393–406, 1986.

[25] D. Perrin and J.-E. Pin. *Infinite Words*, Pure and Applied Mathematics Vol 141, Elsevier, 2004.

[26] J.-E. Pin. *Varieties of Formal Languages.* Plenum Publishing Corp., New York, 1986.

[27] J.-E. Pin. The expressive power of existential first-order sentences of Büchis sequential calculus. In *International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, LNCS vol. 1099, p. 300–311, 1996.

[28] A. Potthoff. First order logic on finite trees. In *TAPSOFT '95*, pages 125–139, LNCS 915, Springer-Verlag, 1995.

[29] A. Potthoff. Modulo-counting quantifiers over finite trees. *Theoretical Computer Science*, 126:97–112, 1994.

[30] M. O. Rabin. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Trans. AMS*, 141:1–35, 1969.

[31] G. Ricci. Cascades of tree-automata and computations in universal algebras. *Math. Systems Theory*, 7:201–218, 1973.

[32] K. Schneider. *Verification of Reactive Systems.* Springer-Verlag, 2004.

[33] M. P. Schützenberger. On finite monoids having only trivial subgroups. *Information and Control* 8:190–194, 1965.

[34] H. Straubing. *Finite Automata, Formal Logic, and Circuit Complexity.* Birkhauser, 1994.

[35] J. W. Thatcher and J. B. Wright. Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second-order logic. *Mathematical Systems Theory*, 2:57–82, 1968.

[36] D. Thérien and A. Weiss. Graph congruences and wreath products. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 36(2):205 215, 1985.

[37] W. Thomas. Classifying regular events in symbolic logic. *Journal of Computer and System Sciences*, 25:360–375, 1982.

[38] W. Thomas. Logical aspects in the study of tree languages. In *Ninth Colloquium on Trees in Algebra and Programming, Bordeaux, 1984*, pages 31–49, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[39] J. VanderWerf. Wreath products of algebras: generalizing the Krohn-Rhodes theorem to arbitrary algebras. *Semigroup Forum*, 52:93–100, 1996.

[40] Th. Wilke. Classifying discrete temporal properties. In *STACS 99, Trier*, pages 32–46, LNCS 1563, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[41] Zh. Wu. A note on the characterization of TL(EF). *Information Processing Letters*, 102:48–54, 2007.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Iván Szabolcs Ph.D. fokozatra pályázó *Logic and tree automata* című disszertációját.

A disszertációban szereplő közös eredményekre vonatkozóan kijelentem, hogy a következő eredményekhez való hozzájárulásunk oszthatatlan:

A 2. fejezet 2.1., 2.2., 2.3 részeiben közölt eredmények.

A következő eredményekben a pályázó hozzájárulása volt a meghatározó:

A 2.4., 2.5. részekben és a 3. fejezetben közölt eredmények.

A következő eredményekben az én hozzájárulásom volt a meghatározó:

....

Szeged, 2007. február 8.

Dr. Ésik Zoltán