Ortodox félcsoportok és szemidirekt szorzatok

doktori értekezés tézisei

Hartmann Miklós

Szeged, 2007.

A természetben előforduló lokális szimmetriák matematikai modellezésére halmazok parciális bijekciói használhatók. Adott halmaz parciális bijekciói a parciális leképezésszorzással félcsoportot alkotnak. Ezen félcsoportok inverzképzésre zárt részfélcsoportjainak absztrakt megfelelői az inverz félcsoportok. Az inverz félcsoportok vizsgálatában kiemelt szerep jut két speciális osztálynak, a félhálók (olyan inverz félcsoportok, melyeknek minden eleme idempotens) és a csoportok (olyan inverz félcsoportok, melyekben egyetlen idempotens van) osztályának. Minden inverz félcsoporthoz természetes módon rendelhető félháló, az inverz félcsoportok idempotensei ugyanis felcserélhetők, ezért félhálót alkotnak. Általában az S félcsoport idempotenseinek halmazát $E(S)$-sel jelöljük. Másrészt, mivel minden inverz félcsoporton van egy legszűkebb olyan kongruencia, amely szerinti faktorfélcsoport csoport, ezzel természetes módon hozzárendelhetünk minden inverz félcsoporthoz egy csoportot is. Amennyiben az inverz félcsoport monoid is, újabb csoport rendelhető hozzá. Ugyanis tetszőleges M monoid esetén M egységelemének úgynevezett $\mathcal{H}$-osztálya csoport. Ezt a csoportot $U(M)$-mel jelöljük. Ugyanakkor több lehetőség is van félhálókból és csoportokból inverz félcsoportok konstruálására. Az egyik ilyen lehetőség félhálók csoportokkal vett szemidirekt szorzatainak a képzése.

A jelen értekezés célja, hogy bizonyos, inverz félcsoportokra és félhálók csoportokkal vett szemidirekt szorzataira vonatkozó eredményeket tágabb félcsoportosztályra, az úgynevezett ortodox félcsoportok osztályára terjesszen ki. Az ortodox félcsoportok idempotensei nem feltétlenül cserélhetők fel, így nem félhálót, hanem köteget alkotnak. Ennek megfelelően az ortodox félcsoportokat kötegek csoportokkal vett szemidirekt szorzatai felől közelítjük meg. A továbbiakban köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatát röviden csak szemidirekt szorzatnak nevezzük. Természetesen, amennyiben inverz félcsoportokról van szó, szemidirekt szorzaton félháló köteggel vett szemidirekt szorzatát értjük.

Előzmények — inverz félcsoportok

D. B. McAlister [McA1]-ben vezette be az E-unitér inverz félcsoport fogalmát. Az E-unitér inverz félcsoportok az inverz félcsoportok elméletében fontos szerepet játszanak. Ennek egyik oka, hogy sok természetes módon felmerülő inverz félcsoport E-unitér (pl. a szabad inverz félcsoportok). Másik oka, hogy viszonylag egyszerű struktúrájuk ellenére az E-unitér inverz félcsoportok idempotens-szétválasztó homomorf képeként bármely inverz félcsoport megkapható, amint azt D. B. McAlister alábbi tétele mutatja.

2.5. Tétel. [McA1] *Bármely inverz félcsoportnak van E-unitér fedője.*

Az E-unitér inverz félcsoportok szerkezetét D. B. McAlister a fent említett cikkében írta le, mégpedig egy, a szemidirekt szorzathoz hasonló konstrukció segítségével. Ezt az eredményt felhasználva L. O'Carroll bebizonyította a következő tételt.

2.6. Tétel. [OCa] *Bármely E-unitér inverz félcsoport beágyazható félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatába.*

Az előző két tétel következményeként bármely inverz félcsoport megkapható mint szemidirekt szorzat inverz részfélcsoportjának idempotens-szétválasztó homomorf képe.

S. Y. Chen és H. S. Hsieh 1974-ben, a gyűrűelméleti faktorizálhatóság fogalmát általánosítva bevezette a faktorizálható inverz monoid fogalmát, egyben belátta a következő tételt.

2.7. Tétel. [CH] *Bármely inverz félcsoport beágyazható faktorizálható inverz monoidba.*

D. B. McAlister [McA2]-ben közvetve belátta, hogy a faktorizálható inverz monoidok éppen egységelemes szemidirekt szorzatok (idempotens-szétválasztó) homomorf képei. Ezen eredmény és az előző tétel kombinációjából adódik, hogy bármely inverz félcsoport beágyazható szemidirekt szorzat idempotens-szétválasztó homomorf képébe. Egy ilyen beágyazás mindig megadja az inverz félcsoportnak egy E-unitér fedőjét is. D. B. McAlister és N. R. Reilly következő tétele mutatja, hogy így bármely E-unitér fedő megkapható.

2.8. Tétel. [MR] *Legyen S inverz félcsoport, $\iota\colon S \to M$ pedig S beágyazása faktorizálható inverz monoidba. Ekkor az $S \times U(M)$ direkt szorzat*

$$\{(s, g) \in S \times U(M) : s\iota \leq g\}$$

részfélcsoportja E-unitér fedője az S félcsoportnak. Fordítva, S minden E-unitér fedője előáll ezen a módon.

D. B. McAlister [McA2]-ben bevezette a majdnem faktorizálható inverz félcsoport fogalmát is (fedő félcsoport néven), majd belátta, hogy a majdnem faktorizálható inverz félcsoportok éppen szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képei. A majdnem faktorizálható inverz félcsoportok és a faktorizálható inverz monoidok kapcsolatát mutatja M. V. Lawson következő tétele.

2.12. Tétel. [La2] *Ha M faktorizálható inverz monoid, akkor $M \setminus U(M)$ majdnem faktorizálható inverz félcsoport. Fordítva, bármely majdnem faktorizálható inverz félcsoport megkapható így faktorizálható inverz monoidból.*

Előzmények — ortodox félcsoportok

A fenti eredmények ortodox félcsoportokra történő általánosítása a '80-as években kezdődött. M. B. Szendrei és K. Takizawa egymástól függetlenül bizonyították az alábbi tételt, ezzel átalánosítva a 2.5. Tételt.

2.13. Tétel. [Sze1],[Ta] *Minden ortodox félcsoportnak van E-unitér fedője.*

Az S E-unitér reguláris félcsoportot *beágyazhatónak* nevezzük, ha beágyazható köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatába. Ha a szemidirekt szorzat köteg tényezője választható az $E(S)$ köteg által generált varietásból, akkor S-et *közelre beágyazhatónak* nevezzük. B. Billhardt következő tétele mutatja, hogy a 2.6. Tétel nem általánosítható ortodox félcsoportokra.

2.14. Tétel. [Bi] *Létezik olyan E-unitér reguláris félcsoport, amely nem ágyazható be köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatába.*

M. B. Szendrei [Sze2]-ben a közelre beágyazhatóságnak egy ekvivalens feltételét adta meg, és ezt felhasználva bebizonyította a következő tételeket.

2.15. Tétel. [Sze2] *A reguláris köteggel rendelkező E-unitér reguláris félcsoportok közelre beágyazhatók.*

2.16. Tétel. [Sze3] *Biszabad ortodox félcsoportok idempotenstiszta homomorf képei közelre beágyazhatók. Következésképpen bármely ortodox félcsoportnak van közelre beágyazható E-unitér fedője.*

Az utóbbi tétel az inverz félcsoportokra vonatkozó 2.5. és 2.6. Tételek közös általánosításának tekinthető.

Csoportvarietások feletti E-unitér fedők

Az értekezés első fő eredményében a 2.14. Tétel eredményét élesítjük azzal, hogy bármely nemtriviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz megadunk egy olyan E-unitér reguláris félcsoportot, amely legnagyobb csoport homomorf képe eleme az adott varietásnak, viszont nincs beágyazható E-unitér fedője az adott varietás felett.

A konstrukcióhoz szükségünk van a gráf-félcsoportok fogalmára, melyeket csoportok általánosított Cayley-gráfjai, valamint kötegvarietások segítségével lehet definiálni.

3.1. Tétel. *Bármely E-unitér reguláris félcsoport izomorf egy gráf-félcsoporttal.*

A fenti tételt felhasználva, adott E-unitér reguláris félcsoport esetén csoporthomomorfizmusok segítségével megadható E-unitér fedőknek egy elég tág osztálya.

3.3. Tétel. *Legyen S E-unitér reguláris félcsoport. Ekkor bármely G csoport, és annak bármely $\varphi\colon G \to S/\sigma$ szürjektív homomorfizmusa meghatározza S egy G fölötti E-unitér fedőjét. Fordítva, S minden E-unitér fedője tartalmaz olyan reguláris részfélcsoportot, amely szintén E-unitér fedője S-nek, és az előbbi módon megkapható alkalmas G csoport és φ homomorfizmus segítségével.*

Az előbbi tétel, valamint B. Billhardt beágyazhatósági kritériumának felhasználásával bizonyítható a fejezet fő erdménye.

3.8. Tétel. *Bármely $\mathbf{V}$ nemtriviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz létezik olyan E-unitér reguláris félcsoport, melynek legnagyobb csoport homomorf képe eleme $\mathbf{V}$-nek, azonban nincs $\mathbf{V}$ fölötti beágyazható E-unitér fedője.*

Majdnem faktorizálható ortodox félcsoportok

Az M ortodox monoidot *faktorizálhatónak* nevezzük, ha bármely $s \in M$ esetén létezik olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, amelyekre $s = eu$. A faktorizálható inverz monoidok esetéhez hasonlóan bizonyítható a következő tétel.

4.1. Tétel. *Az M ortodox monoidra az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) *M faktorizálható,*

(ii) *M köteg monoid csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe,*

(iii) *M köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának homomorf képe.*

Ha S félcsoport, $s \in S$, akkor az s-sel való jobbról szorzás, illetve az s-sel való balról szorzás (mint S transzformációi) között szoros kapcsolat van. Ezen tulajdonság általánosítása vezet S transzlációburkának fogalmához, ami speciális transzformációpárokból áll. Bármely S félcsoport transzlációburka monoid, melynek egységcsoportját $\Sigma(S)$-sel jelöljük. Azt mondjuk, hogy az

S ortodox félcsoport *majdnem faktorizálható*, ha bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $e \in E(S)$ és $(\lambda, \rho) \in \Sigma(S)$, amelyre $s = e\rho$. Az S ortodox félcsoportot *gyengén fedhetőnek* hívjuk, ha előáll szemidirekt szorzat homomorf képeként.

4.3. Tétel. *Egy ortodox félcsoport akkor és csak akkor majdnem faktorizálható, ha köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe.*

Inverz félcsoportok esetén a szemidirekt szorzatok homomorf képei előállnak idempotens-szétválasztó homomorf képekként is. Amint azt a következő példa mutatja, ortodox félcsoportok esetén ez már nem igaz.

4.5. Állítás. *Van olyan kombinatorikus teljesen 0-egyszerű gyengén fedhető ortodox félcsoport, amely nem majdnem faktorizálható.*

Az előző állítás mutatja, hogy ortodox félcsoportok gyenge fedhetőségének vizsgálata bonyolultabb, mint az inverz félcsoportoké. Azonban egy nagyon speciális részosztály esetén a helyzet egyszerűbb. Ugyanis a gyengén fedhető általánosított inverz félcsoportok jól jellemezhetők a legnagyobb inverz félcsoport homomorf képük segítségével.

4.10. Tétel. *Egy általánosított inverz félcsoport akkor és csak akkor gyengén fedhető, ha legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Az előző feltétel nem alkalmas a gyenge fedhetőség jellemzésére az összes ortodox félcsoport esetén, amint azt az alábbi állítás mutatja.

4.12. Állítás. *Létezik olyan ortodox félcsoport, amely nem gyengén fedhető, de legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Ortodox félcsoportok beágyazása

Ebben a fejezetben a 2.16. Tétel felhasználásával bebizonyítjuk, hogy bármely ortodox félcsoport beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba. Legyen S ortodox félcsoport, T pedig olyan E-unitér fedője, amely egy biszabad ortodox félcsoport idempotenstiszta homomorf képe. Jelöljön α olyan idempotens-szétválasztó kongruenciát, amelyre $T/\alpha \cong S$. A 2.16. Tétel bizonyítása alapján T beágyazható egy $\mathcal{B} * G$ szemidirekt szorzatba, ahol a $\mathcal{B}$ köteg a T ortodox félcsoport idempotensei által generált varietásnak eleme. Az előbbi beágyazás közelebbi vizsgálatával bizonyítható, hogy az α kongruencia kiterjeszthető $\mathcal{B} * G$-re. Ez a kiterjesztés nem feltétlenül idempotens-szétválasztó, azonban $\mathcal{B} * G$-t egy alkalmas idempotenstiszta kongruenciával faktorizálva olyan $B*G$ szemidirekt szorzat adódik, amelybe T továbbra is beágyazható, valamint amelyre α már idempotens-szétválasztó kongruenciává terjeszthető ki. Így belátható a következő tétel.

5.9. Tétel. *Bármely ortodox félcsoport beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba.*

Legyen S ortodox félcsoport, valamint $\iota\colon S \to F$ egy beágyazása az F majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba. Továbbá legyen a $\varphi\colon B*G \to F$ szürjektív idempotens-szétválasztó homomorfizmus egy $B*G$ szemidirekt szorzatról F-re. Ekkor az $\{(e,g) \in B*G : (e,g)\varphi \in S\iota\}$ félcsoport E-unitér fedője S-nek. Azt mondjuk, hogy egy E-unitér fedő *majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból származik*, ha izomorf egy ilyen fedővel. Vegyük észre, hogy az előző tétel bizonyítása során valójában azt láttuk be, hogy bizonyos fedők majdnem faktorizálható ortodox félcsoportokba való beágyazásokból származnak. Amennyiben az ortodox félcsoport kötege reguláris, ez minden E-unitér fedőre igaz, amint azt a szerző alábbi eredménye is mutatja.

5.11. Tétel. [Ha3] Bármely reguláris köteggel rendelkező ortodox félcsoport E-unitér fedői megkaphatók majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból.

Hivatkozások

[Bi] Bernd Billhardt, *On embeddability into a semidirect product of a band by a group*, Journal of Algebra 206 (1998); 40–50.

[BM] T. S. Blyth ; R. B. McFadden, *Unit orthodox semigroups.*, Glasgow Math. J. **24** (1983), no. 1, 39–42

[CH] S. Y. Chen ; S. C. Hsieh, *Factorizable inverse semigroups.*, Semigroup Forum **8** (1974), no. 4, 283–297

[Ha1] M. Hartmann, *E-unitary covers over group varieties*, Semigroup Forum **70** (2005), no. 1, 61–70

[Ha2] M. Hartmann, *Almost factorizable orthodox semigroups*, Semigroup Forum **74** (2007), no. 1, 106–124

[Ha3] M. Hartmann, *Embedding into almost factorizable orthodox semigroups*, Acta. Sci. Math., megjelenés alatt

[Ho] John M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[La1] Mark V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific Publishing, 1998.

[La2] M. V. Lawson, *Almost factorizable inverse semigroups*, Glasgow Math. J. **36** (1994), no. 1, 97–111

[McA1] D. B. McAlister, *Groups, semilattices and inverse semigroups. I, II.*, Trans. Amer. Math. Soc. **192**, (1974), 227–244.

[McA2] D. B. McAlister, *Some covering and embedding theorems for inverse semigroups.*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **22** (1976), no. 2, 188–211.

[MR] D. B. McAlister and N. R. Reilly, *E-unitary covers for inverse semigroups*, Pacific J. Math. **68** (1977), no. 1, 161–174

[McF] R. B. McFadden, *Unit-regular orthodox semigroups*, Glasgow Math. J. **25** (1984), no. 2, 229–240

[OCa] L. O'Carroll, *Embedding theorems for proper inverse semigroups*, J. Algebra **42** (1976), no. 1, 26–40

[Pe] M. Petrich, *Inverse semigroups*, Wiley & Sons, 1984.

[Sze1] Mária B. Szendrei, *On a pull-back diagram for orthodox semigroups*, Semigroup Forum **20** (1980), 1–10; Corrigendum: **25** (1982), 311–324.

[Sze2] Mária B. Szendrei, *E-unitary regular semigroups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **106A** (1987), 89–102.

[Sze3] Mária B. Szendrei, *On E-unitary covers of orthodox semigroups*, International Journal of Algebra and Computation Vol. 3, No. 3 (1993); 317–333.

[Sze4] Mária B. Szendrei, *A finite non-embeddable E-unitary regular semigroup*, Semigroups and Applications (Proc. Conf. St. Andrews, 1997), World Scientific, Singapore, 1998; 202–214.

[Sze5] Mária B. Szendrei, *Orthogroup bivarieties are bilocal*, Semigroups with applications (Proc. Conf. Oberwolfach, 1991), World Scientific, Singapore, 1992; 114–131.

[Ta] K. Takizawa, *Orthodox semigroups and E-unitary regular semigroups*, Bull. Tokyo Gakugei Univ., Ser IV **31** (1979), 41–43