Ortodox félcsoportok és szemidirekt szorzatok

Hartmann Miklós

Témavezető: B. Szendrei Mária

Doktori értekezés
Bolyai Intézet
Szegedi Tudományegyetem
2007

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szendrei Máriának a témaválasztásban nyújtott segítségét, valamint hogy a dolgozat fogalmazásában oly sokat segített.

1. Bevezetés

A természetben előforduló lokális szimmetriák matematikai modellezésére halmazok parciális bijekciói használhatók. Adott halmaz parciális bijekciói a parciális leképezésszorzással félcsoportot alkotnak. Ezen félcsoportok inverzképzésre zárt részfélcsoportjainak absztrakt megfelelői az inverz félcsoportok. Az inverz félcsoportok vizsgálatában kiemelt szerep jut két speciális osztálynak, a félhálók (olyan inverz félcsoportok, melyeknek minden eleme idempotens) és a csoportok (olyan inverz félcsoportok, melyekben egyetlen idempotens van) osztályának. Minden inverz félcsoporthoz természetes módon rendelhető félháló, az inverz félcsoportok idempotensei ugyanis felcserélhetők, ezért félhálót alkotnak. Másrészt, mivel minden inverz félcsoporton van egy legszűkebb olyan kongruencia, amely szerinti faktorfélcsoport csoport, ezzel természetes módon hozzárendelhetünk minden inverz félcsoporthoz egy csoportot is.

Az inverz félcsoportok struktúraelméletében fontos szerepet játszanak a félhálók csoportokkal vett szemidirekt szorzatai. Tetszőleges inverz félcsoportot elő lehet állítani ilyen szemidirekt szorzatokból, méghozzá kétféleképpen.

Az egyik lehetőség, hogy ilyen szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képeibe ágyazzuk be az inverz félcsoportokat. Ez a lehetőség a faktorizálható inverz monoid, illetve a majdnem faktorizálható inverz félcsoport fogalmához vezet. A faktorizálható inverz monoid definíciója S. Y. Chentől és H. S. Hsiehtől [CH] származik, akik 1974-ben a gyűrűelméletből ismert faktorizálhatóság fogalmát általánosították inverz félcsoportokra, majd belátták, hogy bármely inverz félcsoport beágyazható faktorizálható inverz monoidba.

A másik lehetőség, hogy ilyen szemidirekt szorzatok inverz részfélcsoportjainak idempotens-szétválasztó homomorf képeiként állítjuk elő az inverz félcsoportokat. Ez az irány az E-unitér inverz félcsoport fogalmához vezet, amit 1974-ben D. B. McAlister [McA1], szabad inverz félcsoportokat vizsgálva vezetett be. Ez a fogalom azóta is központi szerepet játszik az inverz félcsoportok elméletében. Ennek egyik oka az, hogy sok természetesen felmerülő inverz félcsoport E-unitér (például a szabad inverz félcsoportok, a biciklikus félcsoport). Másik oka, hogy viszonylag egyszerű struktúrájuk ellenére az E-unitér inverz félcsoportok elég általánosak ahhoz, hogy bármely inverz félcsoport előálljon valamely E-unitér inverz félcsoport idempotens-szétválasztó homomorf képeként. L. O'Carroll [OCa] belátta 1976-ban, hogy minden E-unitér inverz félcsoport beágyazható félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatába. Ez az eredmény a szemidirekt szorzatok közelebbi vizsgálatára ösztönözhette D. B. McAlistert [McA2], aki 1976-ban bevezette a fedő félcsoportok fogalmát, tulajdonképpen a faktorizálható inverz monoidok általánosításaként. Ezek után belátta, hogy a fedő félcsoportok éppen a szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képei, amiből következik, hogy adott inverz félcsoport fedő félcsoportokba történő beágyazásai E-unitér fedőket eredményeznek. Ezt az eredményt 1977-ben N. R. Reillyvel együtt élesítette [MR]-ben, ugyanis belátták, hogy bármely E-unitér fedő előáll faktorizálható inverz monoidba való beágyazásból. A faktorizálható inverz monoidok és fedő félcsoportok kapcsolatát M. V. Lawson [La2] tisztázta 1994-ben, egyben a fedő félcsoportoknak új nevet adott, majdnem faktorizálható inverz félcsoportoknak nevezve őket. Ugyanakkor bebizonyította, hogy az E-unitér fedők kategóriája és a majdnem faktorizálható inverz félcsoportokba történő speciális beágyazások kategóriája ekvivalens egymással. Ez az eredmény bizonyos értelemben lezárta az E-unitér fedők, szemidirekt szorzatok, illetve majdnem faktorizálható inverz félcsoportok kapcsolatának vizsgálatát.

A következő természetes lépés ezen eredmények bővebb félcsoportosztályokra történő általánosítása volt. Az egyik, szélesebb körben vizsgált osztály az ortodox félcsoportok osztálya. Az ortodox félcsoportok idempotensei részfélcsoportot, úgynevezett köteget alkotnak, azonban nem feltétlenül felcserélhetők.

Az inverz félcsoportokhoz hasonlóan az ortodox félcsoportok is előállíthatók szemidirekt szorzatok segítségével, ebben az esetben azonban köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatát kell használni. A továbbiakban köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatát röviden csak szemidirekt szorzatnak nevezzük. Természetesen, amennyiben inverz félcsoportokról van szó, szemidirekt szorzaton félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatát értjük.

Az E-unitér inverz félcsoportok fogalma is természetes módon általánosítható ortodox félcsoportokra. M. B. Szendrei (1980-ban, [Sze1]) és K. Takizawa (1979-ben, [Ta]) egymástól függetlenül belátták, hogy bármely ortodox félcsoportnak van E-unitér fedője. A következő lépés annak vizsgálata volt, hogy az E-unitér reguláris félcsoportok (amelyek szükségképpen ortodox félcsoportok) beágyazhatók-e szemidirekt szorzatba. Ezen a téren az első eredmény 1987-ben született, amikor M. B. Szendrei [Sze2] bebizonyította, hogy ha egy E-unitér reguláris félcsoport kötege reguláris, azaz viszonylag közel van a félhálókhoz, akkor beágyazható szemidirekt szorzatba. Sőt, a szemidirekt szorzat köteg tényezője választható a kiindulási E-unitér reguláris félcsoport kötege által generált varietásból. 1993-ban M. B. Szendrei [Sze3] bebizonyította, hogy bármely ortodox félcsoportnak van olyan E-unitér fedője, amely beágyazható szemidirekt szorzatba. Ezen eredmények mind az inverz félcsoportok elméletében előforduló megfelelő eredmények általánosításai. Az első komolyabb eltérést B. Billhardt [Bi] találta, aki megmutatta, hogy van olyan E-unitér reguláris félcsoport, amely nem ágyazható be szemidirekt szorzatba. Időközben a szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képeinek vizsgálatában is történt előrelépés, ugyanis T. S. Blyth és R. B. McFadden [BM] 1983-ban bevezették az úgynevezett egység-reguláris félcsoport fogalmát, ami a faktorizálható inverz monoid fogalmának általánosítása, és bebizonyították, hogy bármely egység-reguláris félcsoport előáll szemidirekt szorzat idempotens-szétválasztó homomorf képeként.

Jelen értekezésben további, az inverz félcsoportokra vonatkozó eredményt általánosítunk ortodox félcsoportokra, valamint rámutatunk olyan eredményekre, amelyek nem általánosíthatók ortodox félcsoportokra. Először belátjuk, hogy bármely nem-triviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietás esetén megadható olyan E-unitér reguláris félcsoport, amelynek legnagyobb csoport homomorf képe eleme az adott varietásnak, azonban nincs olyan, szemidirekt szorzatba beágyazható E-unitér fedője, amelynek legnagyobb csoport homomorf képe is eleme ennek a varietásnak. Ez az eredmény fontos különbségre mutat rá az inverz, illetve ortodox félcsoportok között, ugyanis bármely E-unitér inverz félcsoport beágyazható olyan szemidirekt szorzatba, amelynek csoport tényezője megegyezik az E-unitér inverz félcsoport legnagyobb csoport homomorf képével.

A szemidirekt szorzatok (idempotens-szétválasztó) homomorf képeinek vizsgálata során újabb jelentős különbségekre derül fény. Ugyanis inverz félcsoportok esetén a szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képei ugyanazok, mint a szemidirekt szorzatok homomorf képei, míg ortodox félcsoportok esetén ez a két osztály különböző. Ortodox félcsoportok esetén a szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képei a majdnem faktorizálható inverz félcsoportokhoz hasonlóan jellemezhetők, azonban tetszőleges homomorf képei nehezen kezelhetők. Abban az esetben, ha csak olyan ortodox félcsoportokkal foglalkozunk, melyeknek kötege normális, a szemidirekt szorzatok homomorf képei a legnagyobb inverz félcsoport homomorf kép segítségével jellemezhetők.

Ugyanakkor az inverz félcsoportokhoz hasonlóan az ortodox félcsoportok is beágyazhatók szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képeibe. Jelen dolgozat szerzője [Ha3]-ban megmutatta, hogy amennyiben az ortodox félcsoport kötege reguláris, az inverz félcsoportokhoz hasonlóan szoros kapcsolat mutatható ki az E-unitér fedők, illetve a majdnem faktorizálható ortodox félcsoportokba történő beágyazások között.

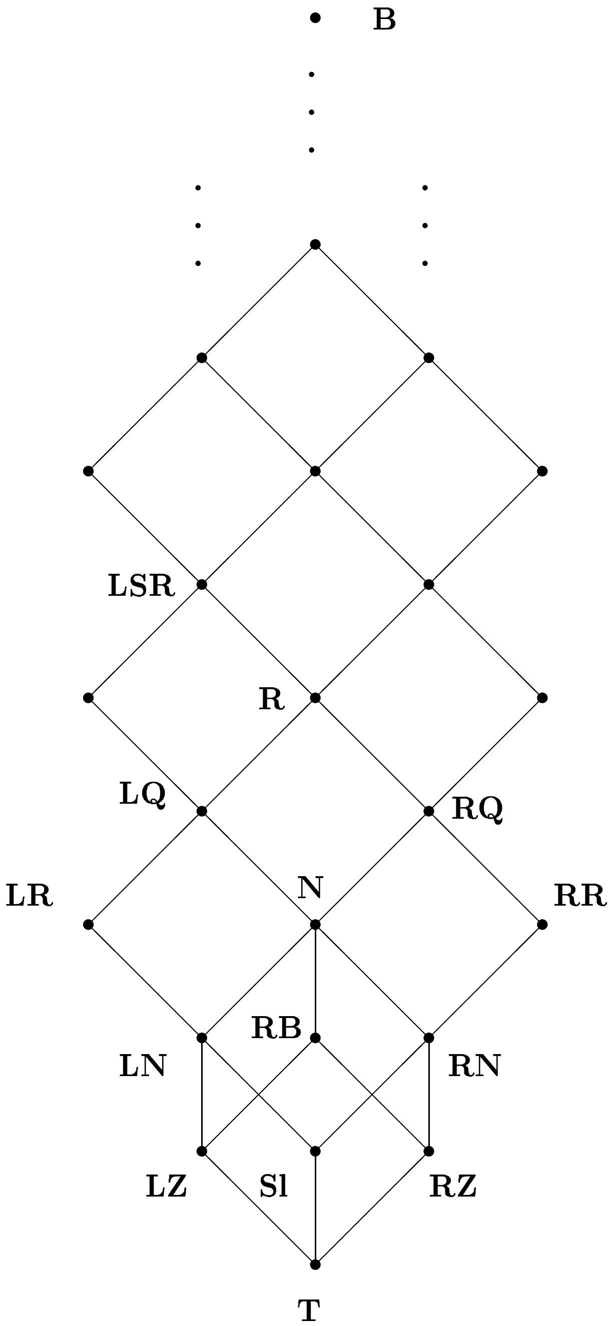
Az értekezés 2. Fejezetében az inverz félcsoportokra vonatkozó eredményeket ismertetjük. A 3. Fejezetben B. Billhardt negatív eredményét erősítjük annak bizonyításával, hogy bármely $\mathbf{V}$ csoportvarietáshoz megadható olyan E-unitér reguláris félcsoport, amelynek nincsen $\mathbf{V}$ feletti beágyazható E-unitér fedője. A 4. Fejezetben szemidirekt szorzatok homomorf képeit vizsgáljuk, így bevezetjük a majdnem faktorizálható, illetve gyengén fedhető ortodox félcsoportok fogalmát. Végül az 5. Fejezetben belátjuk, hogy minden ortodox félcsoport beágyazható valamely majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba. A 3. és 4. Fejezet eredményei a [Ha1] és [Ha2] cikkekben találhatók, míg az 5. Fejezet még nem publikált eredményeket tartalmaz.

2. Előzmények

Ebben a fejezetben a félcsoportelmélet alapvető fogalmait és az általunk használt fontosabb tételeit ismertetjük. Ezek megtalálhatók [Ho]-ban. Majd ismertetjük az inverz félcsoportokra vonatkozó azon eredményeket, melyek a jelen dolgozat vizsgálatait motiválták.

Egy S félcsoport s elemét *regulárisnak* nevezzük, ha létezik olyan $t \in S$, amelyre $sts = s$. Azt mondjuk, hogy s' az s *inverze*, ha $ss's = s$ és $s'ss' = s'$. Az s inverzeinek halmazát $V(s)$-sel jelöljük. Könnyen látható, hogy egy $s \in S$ elem pontosan akkor reguláris, ha van inverze. Ha S minden eleme reguláris, akkor S-et *reguláris félcsoportnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $e \in S$ elem *idempotens*, ha $e^2 = e$. Az S félcsoport idempotenseinek halmazát $E(S)$-sel jelöljük.

Az olyan félcsoportokat, amelyeknek minden eleme idempotens, *kötegeknek* nevezzük. A dolgozatban szükségünk lesz a kötegek varietásának részvarietáshálójára. A hálót a következő oldalon szereplő ábra mutatja.



Az ábrán található és a dolgozatban használt varietások a következők (az **L**-lel kezdődő varietások duálisan definiálhatók):

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{T} & = & [x^2 = x, x = y], \text{ a triviális kötegek varietása} \\
\mathbf{RZ} & = & [x^2 = x, xy = y], \text{ a jobbzéró félcsoportok varietása} \\
\mathbf{Sl} & = & [x^2 = x, xy = yx], \text{ a félhálók varietása} \\
\mathbf{RB} & = & [x^2 = x, xyx = x], \text{ a derékszögű kötegek varietása} \\
\mathbf{RN} & = & [x^2 = x, xyz = yxz], \text{ a jobbnormális kötegek varietása} \\
\mathbf{N} & = & [x^2 = x, xyzx = xzyx], \text{ a normális kötegek varietása} \\
\mathbf{RR} & = & [x^2 = x, xyx = yx], \text{ a jobbreguláris kötegek varietása} \\
\mathbf{R} & = & [x^2 = x, xyzx = xyxzx], \text{ a reguláris kötegek varietása} \\
\mathbf{LSR} & = & [x^2 = x, axy = axyayxy], \text{a balról félig reguláris kötegek varietása} \\
\mathbf{B} & = & [x^2 = x], \text{ a kötegek varietása}
\end{array}
$$

A reguláris félcsoportok vizsgálatában fontos szerepet játszanak a Green-relációk. Ezek definíciója megtalálható [Ho]-ban. Ha S reguláris félcsoport, T pedig reguláris részfélcsoportja S-nek, akkor bármely $t_1, t_2 \in T$ elemre $t_1 \mathcal{R}\, t_2$ a T félcsoportban pontosan akkor, ha $t_1 \mathcal{R}\, t_2$ az S félcsoportban. A fenti állítás megfelelője teljesül az $\mathcal{L}$ Green-relációra is, azonban a $\mathcal{J}$ és $\mathcal{D}$ relációkra már nem. Ezért a dolgozatban $\mathcal{J}_T$-vel, illetve $\mathcal{D}_T$-vel jelöljük a T részfélcsoport $\mathcal{J}$, illetve $\mathcal{D}$ relációját.

Monoidnak az egységelemes félcsoportokat hívjuk. Az M monoid egységelemének $\mathcal{H}$-osztályát M *egységcsoportjának* nevezzük. A továbbiakban az M monoid egységelemét 1-gyel, egységcsoportját pedig $U(M)$-mel jelöljük. Ha $u \in U(M)$, akkor u^{-1}-gyel jelöljük u-nak az $U(M)$ csoportban vett inverzét.

Azt mondjuk, hogy S *ortodox félcsoport*, ha S reguláris, és $E(S)$ részfélcsoportja S-nek. Az S ortodox félcsoportot *inverz félcsoportnak* hívjuk, ha idempotensei felcserélhetők, vagyis $E(S)$ félháló. Ha S inverz félcsoport, akkor definiálható rajta egy részbenrendezés a következőképpen: $a, b \in S$ esetén $a \leq b$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $e \in E(S)$, amelyre $a = eb$. Ezt a részbenrendezést S *természetes rendezésének* nevezzük. Ha S reguláris félcsoport, és S-ben teljesül, hogy valahányszor $es \in E(S)$ valamely $e \in E(S)$ és $s \in S$ esetén, mindannyiszor $s \in E(S)$, akkor S-et *E-unitér reguláris félcsoportnak* nevezzük.

Ha S reguláris félcsoport, akkor azon ρ kongruenciái között, amelyekre S/ρ csoport, van legszűkebb. Ezen kongruenciát S *legszűkebb csoportkongruenciájának* hívjuk, és σ-val jelöljük. Az S/σ faktorcsoportot pedig S *legnagyobb csoport homomorf képének* nevezzük. Egy $\rho \subseteq S \times S$ kongruenciát *idempotenstisztának* nevezünk, ha bármely $e \in E(S)$ és $s \in e\rho$ esetén $s \in E(S)$. Az alábbi tétel az E-unitér reguláris félcsoportok jellemzését adja a legszűkebb csoportkongruencia segítségével.

2.1. Tétel. *Egy reguláris félcsoport akkor és csak akkor E-unitér reguláris félcsoport, ha legszűkebb csoportkongruenciája idempotenstiszta. Következésképpen minden E-unitér reguláris félcsoport egyben ortodox is.*

Ha S ortodox félcsoport, akkor azon ρ kongruenciái között, amelyekre S/ρ inverz félcsoport, van legkisebb. Ezt a kongruenciát S *legszűkebb inverz kongruenciájának* hívjuk, és γ-val jelöljük. Az S/γ inverz félcsoportot S *legnagyobb inverz félcsoport homomorf képének* nevezzük. A γ kongruenciának fontos tulajdonsága , hogy $\mathcal{H} \cap \gamma$ az egyenlőségreláció S-en.

Az S félcsoport ρ kongruenciáját *idempotens-szétválasztónak* nevezzük, ha bármely $e, f \in E(S)$ esetén $e\rho = f\rho$ csak akkor teljesül, ha $e = f$. Ha S reguláris, akkor bármely idempotens-szétválasztó kongruenciája benne van a $\mathcal{H}$ relációban. Az S reguláris félcsoport idempotens-szétválasztó kongruenciái között van legnagyobb, ezt S *legnagyobb idempotens-szétválasztó kongruenciájának* nevezzük, és μ-vel jelöljük. Ortodox félcsoportok esetén a μ kongruencia jellemezhető "konjugálások" segítségével, amint az alábbi tétel mutatja.

2.2. Tétel. *Legyen S ortodox félcsoport, $s \in S$, $s' \in V(s)$, valamint $e \in E(S)$. Ekkor $s'es \in E(S)$, és bármely $\hat{s} \in V(s)$ esetén, ha $e \mathrel{\mathcal{R}} f$, akkor $ses' \mathrel{\mathcal{R}} se\hat{s}$. Hasonlóképpen $s'es \in E(S)$, és bármely $\hat{s} \in V(s)$ esetén, ha $e \mathrel{\mathcal{L}} f$, akkor $s'es \mathrel{\mathcal{L}} \hat{s}es$.*

Továbbá $s \mathrel{\mu} t$ akkor és csak akkor, ha bármely $e \in E(S)$, $s' \in V(s)$ és $t' \in V(t)$ esetén

$$s'es \mathrel{\mathcal{L}} t'et \quad \textit{és} \quad ses' \mathrel{\mathcal{R}} tet'.$$

A $\varphi\colon S \to T$ homomorfizmust *idempotens-szétválasztónak* nevezzük, ha magja idempotens-szétválasztó kongruencia. Azt mondjuk, hogy az E-unitér reguláris T félcsoport az S ortodox félcsoport *E-unitér fedője a G csoport felett*, ha $T/\sigma \cong G$, és S előáll T idempotens-szétválasztó homomorf képeként. Ha a G csoport valamely $\mathbf{V}$ csoportvarietásnak eleme, akkor T-t $\mathbf{V}$ feletti E-unitér fedőnek is nevezzük.

Legyen S reguláris félcsoport. Azt mondjuk, hogy a $\rho\colon S \to S$ leképezés *jobbtranszlációja S-nek*, ha bármely $s, t \in S$ esetén $s \cdot t\rho = (st)\rho$. Hasonlóképpen, a $\lambda\colon S \to S$ balról írt leképezést *baltranszlációnak* nevezzük, ha $\lambda s \cdot t = \lambda(st)$ minden $s, t \in S$-re. Ha ρ jobbtranszlációja, λ pedig baltranszlációja S-nek, akkor azt mondjuk, hogy a (λ, ρ) pár *kapcsolt*, ha bármely $s, t \in S$ esetén $s\rho \cdot t = s \cdot \lambda t$. Például ha $s \in S$, akkor a $\rho_s\colon S \to S$, $t \mapsto ts$ leképezés jobbtranszlációja, a $\lambda_s\colon S \to S$, $t \mapsto st$ leképezés baltranszlációja S-nek, valamint (λ_s, ρ_s) kapcsolt pár. Jelölje $\Omega(S)$ az S félcsoport kapcsolt párjainak a halmazát, és definiáljunk szorzást $\Omega(S)$-en a következő módon:

$$(\lambda, \rho) \cdot (\lambda', \rho') = (\lambda\lambda', \rho\rho'),$$

ahol a baltranszlációkat balról írt leképezésként szorozzuk, vagyis $(\lambda\lambda')s = \lambda(\lambda's)$. Ekkor $\Omega(S)$ ezzel a szorzással monoidot alkot, amelynek egységeleme a (ι, ι) pár, ahol ι jelöli S identikus leképezését. Ezt a monoidot az S félcsoport *transzlációburkának* nevezzük. Az $\Omega(S)$ monoid egységcsoportját $\Sigma(S)$-sel jelöljük.

A csoportelméleti szemidirekt szorzat mintájára definiálható félcsoportok szemidirekt szorzata is. Mi itt most a szemidirekt szorzatnak egy speciális esetét ismertetjük, mégpedig köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatát. Azt mondjuk, hogy a *G csoport hat a B kötegen*, ha adott egy $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(B)$ anti-homomorfizmus. Ha $a \in G$ és $e \in B$, akkor az $e(a\varphi)$ elemet ${}^{a}e$-vel jelöljük. Például ha $a, b \in G$ és $e \in B$, akkor ${}^{a}({}^{b}e) = {}^{ab}e$. Ha a G csoport hat a B kötegen, akkor definiáljunk szorzást a $B \times G$ Descartes-szorzaton a következő módon:

$$(e, a) \cdot (f, b) = (e \cdot {}^{a}f, ab).$$

Ekkor $B \times G$ ezzel a szorzással félcsoportot alkot, amit $B * G$-vel jelölünk, és a *B köteg G csoporttal vett szemidirekt szorzatának* hívunk. Amennyiben a szövegkörnyezetből kiderül, hogy milyen kötegről, illetve csoportról van szó, röviden csak *szemidirekt szorzatot* írunk. A következő tétel szemidirekt szorzatok néhány tulajdonságát rögzíti.

2.3. Tétel. *Legyen B köteg, G pedig csoport, mely hat B-n. Ekkor a $B * G$ félcsoport E-unitér reguláris félcsoport. Továbbá tetszőleges $(e, a), (f, b) \in B * G$ esetén*

(i) $V((e, a)) = \{({}^{a^{-1}}e', a^{-1}) : e' \in V_B(e)\}$,

(ii) $(e, a)\ \mathcal{R}\ (f, b)$ *akkor és csak akkor ha* $e\ \mathcal{R}\ f$,

(iii) $(e, a)\ \mathcal{L}\ (f, b)$ *akkor és csak akkor ha* ${}^{a^{-1}}e\ \mathcal{L}\ {}^{b^{-1}}f$,

(iv) $(e, a)\ \sigma\ (f, b)$ *akkor és csak akkor ha* $a = b$, *és így* $B * G$ *legnagyobb csoport homomorf képe izomorf* G*-vel,*

(v) $B * G$ *pontosan akkor egységelemes, ha* B *az.*

Az 5. Fejezetben szükségünk van valamely reláció által generált kongruencia jellemzésére. Legyen S félcsoport, α pedig tetszőleges szimmetrikus reláció S-en. Legyen $s, t \in S$. Azt mondjuk, hogy az (s, t) pár *elemi α-átalakítás*, ha $s = u_1pu_2$ és $t = u_1qu_2$ valamely $u_1, u_2 \in S^1$ és $p, q \in S$ esetén, ahol $(p, q) \in \alpha$. A $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sorozatot, ahol $p_i \in S$ $(i = 0, \ldots, n)$, *$s \to t$ α-átalakításnak* nevezzük, ha $s = p_0$, $t = p_n$, és bármely $0 \leq i < n$-re (p_i, p_{i+1}) elemi α-átalakítás. Jelölje $\alpha^\sharp$ az α által generált kongruenciát. Ismert, hogy

$s\ \alpha^\sharp\ t$ pontosan akkor, ha létezik $s \to t$ α-átalakítás. Amennyiben a szövegkörnyezetből kiderül, hogy milyen α reláció által generált kongruenciát vizsgálunk, az elemi α-átalakításokat röviden csak elemi átalakításoknak, az $s \to t$ α-átalakításokat pedig $s \to t$ átalakításoknak nevezzük.

A következőkben E-unitér reguláris félcsoportok egy konstrukcióját ismertetjük.

Gráf-félcsoportok. A gráf-félcsoportok konstrukciója megtalálható az [Sze4] cikkben. Először a konstrukcióhoz szükséges fogalmakat definiáljuk. Ha X nemüres halmaz, legyen X' olyan halmaz, amely diszjunkt X-től, és amelyre adott egy $'\colon X \to X', x \mapsto x'$ bijekció. Jelölje ekkor $X^\oplus$ az $X \cup X'$ feletti szabad félcsoportot.

Ha $\mathcal{G}$ irányított gráf, jelöljük csúcsainak halmazát $O(\mathcal{G})$-vel, éleinek halmazát pedig $A(\mathcal{G})$-vel. Minden $i, j \in O(\mathcal{G})$-re jelölje $\mathcal{G}(i,j)$ az i csúcsból a j-be menő élek halmazát. A $\mathcal{G}$ gráf α automorfizmusa az $O(\mathcal{G})$ halmaz egy permutációjából (amit szintén α-val jelölünk), és $\alpha_{i,j}\colon \mathcal{G}(i,j) \to \mathcal{G}(i\alpha, j\alpha)$ bijekciók egy családjából áll. Olyan esetekben, amikor nem okoz félreértést, $\alpha_{i,j}$ helyett α-t használunk. Így beszélhetünk valamely $x \in A(\mathcal{G})$ él α melletti képéről. A $\mathcal{G}$ gráf automorfizmusainak csoportját $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ jelöli. Azt mondjuk, hogy a G csoport *hat a $\mathcal{G}$ gráfon*, ha adott egy $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ antihomomorfizmus. Ha $a \in G$ és $x \in O(\mathcal{G}) \cup A(\mathcal{G})$, akkor $x(a\varphi)$-t ${}^a x$-szel jelöljük.

Félgrupoidnak nevezünk egy olyan $\mathcal{G}$ gráfot, amelynek az élhalmazán adott egy parciális szorzás, amely minden $x \in \mathcal{G}(i,j)$ és $y \in \mathcal{G}(j,k)$ élhez egy $xy \in \mathcal{G}(i,k)$ élt rendel oly módon, hogy ez a szorzás asszociatív, vagyis ha x, y, z olyan élek $\mathcal{G}$-ben, amelyekre $x \in \mathcal{G}(i,j)$, $y \in \mathcal{G}(j,k)$, $z \in \mathcal{G}(k,l)$ valamely $i, j, k, l \in O(\mathcal{G})$-re, akkor $(xy)z = x(yz)$. (Tehát egy félgrupoid tulajdonképpen identikus morfizmusok nélküli kategória.) A $\mathcal{G}$ félgrupoid automorfizmusai a $\mathcal{G}$ gráf azon automorfizmusai, amelyek felcserélhetők a szorzással. Azt mondjuk, hogy egy *csoport hat egy félgrupoidon*, ha adott egy antihomomorfizmus a csoportról a félgrupoid automorfizmus-csoportjába.

A $\mathcal{G}$ félgrupoid *kongruenciáinak* nevezzük $A(\mathcal{G})$ azon, $\mathcal{G}$ szorzásával kompatibilis ekvivalenciáit, amelyek minden osztálya valamely $\mathcal{G}(i,j)$-nek részhalmaza. Ha G olyan csoport, amely hat a $\mathcal{G}$ félgrupoidon, akkor $\mathcal{G}$ azon kongruenciáit, amelyek G hatásával is kompatibilisek, *G-kongruenciáknak* nevezzük.

A *szabad félgrupoidot* egy adott $\mathcal{G}$ gráfon $\mathcal{G}^+$-szal jelöljük. Ismert, hogy $O(\mathcal{G}^+) = O(\mathcal{G})$, és bármely $i, j \in O(\mathcal{G}^+)$-ra $\mathcal{G}^+(i,j)$ az összes $\mathcal{G}$-beli irányított (i,j)-séták halmaza. A sétákon a parciális szorzás az összefűzés. Ha G hat a $\mathcal{G}$ gráfon, akkor ezen hatás természetes módon kiterjeszthető $\mathcal{G}^+$-ra is.

Ha S félcsoport, X halmaz, valamint $\chi\colon X \to S$ olyan leképezés, amelyre $X\chi$ generálja S-et, akkor az (S, X, χ) hármast *X-generált félcsoportnak* nevezzük. Ha (S, X, χ) és (T, X, η) X-generált félcsoportok, akkor *X-homomorfizmusoknak* nevezzük azon $\varphi\colon T \to S$ homomorfizmusokat, melyekre $\chi = \psi\eta$. Ha adott a (G, X, χ) X-generált csoport, akkor legyen $\mathcal{G}(G, X, \chi)$ az a gráf, amelynek csúcshalmaza G, éleinek halmaza pedig $G \times X$. Az $(a, x) \in G \times X$ él mutasson az a csúcsból az $a \cdot x\chi$ csúcsba. Ekkor G az eltolásokkal hat $\mathcal{G}(G, X, \chi)$-n: ${}^{b}(a, x) = (ba, x)$.

Most ezt a gráfot kettőzzük meg úgy, hogy minden egyes $(a, x) \in \mathcal{G}(a, a \cdot x\chi)$ él esetén bővítsük a gráfot egy új $(a, x)' = (a \cdot x\chi, x') \in \mathcal{G}(a \cdot x\chi, a)$ éllel. Az így kapott gráfot $\overline{\mathcal{G}}$-sal, a $\overline{\mathcal{G}}^{+}$ félgrupoidot pedig $\mathcal{G}^{\oplus}$-szal jelöljük. A $\mathcal{G}^{\oplus}$ félgrupoid élei $\overline{\mathcal{G}}$-beli séták, vagyis felfoghatók $A(\overline{\mathcal{G}})$ fölötti szavakként, így $A(\mathcal{G}^{\oplus}) \subseteq A(\mathcal{G})^{\oplus}$. Ezt a feltevést a továbbiakban mindig használni fogjuk. Vegyük észre, hogy a G csoport hatása a $\mathcal{G}$ gráfon meghatározza egy hatását a $\overline{\mathcal{G}}$ gráfon is, és ez a hatás kiterjeszthető az $A(\mathcal{G})^{\oplus}$ szabad félcsoportra. A továbbiakban az $(1, x)$ alakú éleket $\underline{x}$-nak fogjuk rövidíteni. Ekkor persze $\underline{x}' = (x\chi, x')$. Ha $p = x_1 \dots x_n \in \mathcal{G}^{\oplus}(a, b)$, akkor a p séta *inverzének* nevezzük a $p' = x_n' \dots x_1' \in \mathcal{G}^{\oplus}(b, a)$ sétát (ahol természetesen $((a, x)')' = (a, x)$). Ha $u \in A(\mathcal{G})^{\oplus}$, akkor első betűjét $i(u)$-val, utolsó betűjét $f(u)$-val, az $i(u)$ él indulási csúcsát $\alpha(u)$-val, az $f(u)$ él érkezési csúcsát pedig $\omega(u)$-val jelöljük.

A reguláris félcsoportok osztálya nem zárt a részfélcsoport-képzésre nézve, így nem is alkot varietást. Azonban reguláris félcsoportok homomorf képe, illetve direkt szorzata is reguláris. Ezért lehetőség van arra, hogy a varietások elméletét 'átvigyük' reguláris félcsoportokra is, mégpedig az alábbi módon.

Nevezzük *e-varietásnak* az olyan, reguláris félcsoportokból álló osztályokat, amelyek zártak a homomorf képek és reguláris részfélcsoportok képzésére, valamint a direkt szorzásra nézve. Például az ortodox félcsoportok vagy a kötegek osztálya e-varietás.

Az ortodox félcsoportok e-varietásán belül a rész-e-varietások úgynevezett *bi-azonosságokkal* definiálhatók. Egy X halmaz feletti bi-azonosság $u = v$ alakú, ahol $u, v \in X^{\oplus}$. Azt mondjuk, hogy egy S ortodox félcsoport kielégíti az $u(x_1, x_1', \dots, x_n, x_n') = v(x_1, x_1', \dots, x_n, x_n')$ bi-azonosságot, ha bármely, páronként inverz $s_1, s_1', \dots, s_n, s_n'$ elemére $u(s_1, s_1', \dots, s_n, s_n') = v(s_1, s_1', \dots, s_n, s_n')$. Értelmezhető a *bi-invariáns kongruencia* fogalma is, és bármely, ortodox félcsoportokból álló $\mathbf{V}$ e-varietásra definiálható a

$$\rho_{\mathbf{V}}(X) = \{(u, v) \in X^{\oplus} \times X^{\oplus} : \text{az } u = v \text{ bi-azonosság teljesül } \mathbf{V}\text{-ben}\}$$

kongruencia, amelyre igaz, hogy az $X^{\oplus}/\rho_{\mathbf{V}}$ félcsoport az úgynevezett *bi-szabad félcsoport* $\mathbf{V}$-ben. Ez azt jelenti, hogy bármely $S \in \mathbf{V}$ esetén minden olyan $\chi\colon \overline{X} \to S$ leképezés, amelyre $x'\chi \in V(x\chi)$ teljesül minden $x \in X$-re, egyértelműen kiterjeszthető $X^{\oplus}/\rho_{\mathbf{V}} \to S$ homomorfizmussá.

Az alapfogalmak ismertetése után már következhet az említett konstrukció.

Legyen (G, X, χ) X-generált csoport. Jelöljük $\mathcal{G}(G, X, \chi)$-t $\mathcal{G}$-vel, és vegyünk egy δ G-kongruenciát $\mathcal{G}^{\oplus}$-on. Legyen

$$S(\mathcal{G}, \delta) = \{p\delta : p \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, -)\},$$

és definiáljunk rajta szorzást a következő módon: ha $p \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, a)$ és $q \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, -)$, akkor legyen

$$p\delta \star q\delta = (p \cdot {}^{a}q)\delta.$$

Ha adott a $\mathbf{V}$ kötegvarietás, akkor jelöljük a $\rho_{\mathbf{V}}(A(\mathcal{G}))$ reláció megszorítását $A(\mathcal{G}^{\oplus})$-ra $\beta_{\mathbf{V}}(A(\mathcal{G}))$-vel. Ha a szövegkörnyezetből kiderül, hogy milyen $\mathcal{G}$ gráfról van szó, akkor $\beta_{\mathbf{V}}(A(\mathcal{G}))$ helyett csak a $\beta_{\mathbf{V}}$ jelölést használjuk.

2.4. Tétel. *Legyen* $\mathbf{V}$ *tetszőleges kötegvarietás. Legyen továbbá* $\delta \supseteq \beta_{\mathbf{V}}$ G-*kongruencia* $\mathcal{G}^{\oplus}$-*on. Ekkor*

(i) $S(\mathcal{G}, \delta)$ E-*unitér reguláris félcsoport.*

(ii) $S(\mathcal{G}, \delta)$-*t generálja az* $\{\underline{x}\delta, ({}^{(x\chi)^{-1}}\underline{x}')\delta : x \in X\}$ *halmaz, ahol* $\underline{x}\delta$ *és* $({}^{(x\chi)^{-1}}\underline{x}')\delta$ *egymás inverzei minden* $x \in X$-*re.*

(iii) $S(\mathcal{G}, \delta)$ *idempotenseinek kötege eleme* $\mathbf{V}$-*nek.*

(iv) *Ha* $p \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, a)$ *és* $q \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, b)$, *akkor az* $S(\mathcal{G}, \delta)$-*beli* $p\delta$ *és* $q\delta$ *elemek pontosan akkor vannak* σ *relációban, ha* $a = b$. *Ezért* $S(\mathcal{G}, \delta)$ *legnagyobb csoport homomorf képe* G.

A fenti tételben szereplő félcsoportokat *gráf-félcsoportoknak* hívjuk.

Inverz félcsoportok. Az E-unitér inverz félcsoportok fontos szerepet játszanak az inverz félcsoportok elméletében, például a szabad inverz félcsoportok is E-unitérek. Ezen kívül D. B. McAlister úgynevezett P-tétele alapján az E-unitér inverz félcsoportok szerkezete jól ismert, némileg a szemidirekt szorzathoz hasonlít. Szintén D. B. McAlistertől származik az alábbi tétel.

2.5. Tétel. [McA1] *Bármely inverz félcsoportnak van* E-*unitér fedője.*

A szemidirekt szorzatok és az E-unitér inverz félcsoportok kapcsolatát mutatja L. O'Carroll alábbi tétele.

2.6. Tétel. [OCa] *Egy inverz félcsoport akkor és csak akkor E-unitér, ha beágyazható félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatába. A szemidirekt szorzat csoport tényezője választható az adott E-unitér inverz félcsoport legnagyobb csoport homomorf képének is.*

Azt mondjuk, hogy az M inverz monoid *faktorizálható*, ha bármely $m \in M$ esetén létezik olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, amelyre $m = eu$. A fenti fogalom S. Y. Chentől és S. C. Hsiehtől származik. Mivel ha $s = eu$, akkor $s = u \cdot u^{-1}eu$, ezért látható, hogy az M inverz monoid pontosan akkor faktorizálható, ha bármely $s \in M$ esetén létezik olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, hogy $s = ue$. Jelölje $\mathcal{I}(X)$ az X halmaz parciális bijekcióinak inverz monoidját. Ha X véges, akkor bármely parciális bijekciója kiterjeszthető X egy permutációjává, amiből következik, hogy $\mathcal{I}(X)$ faktorizálható. Ha pedig X végtelen, akkor könnyen látható (lásd pl. [CH]-ban), hogy beágyazható faktorizálható inverz monoidba. Mivel bármely inverz félcsoport beágyazható $\mathcal{I}(X)$-be alkalmas X halmaz esetén, a következő tételt beláttuk.

2.7. Tétel. [CH] *Bármely inverz félcsoport beágyazható faktorizálható inverz monoidba.*

Ugyanakkor ha M faktorizálható monoid, S inverz félcsoport, $\iota\colon S \to M$ pedig beágyazás, akkor a $T = \{(s, g) \in S \times U(M) : s\iota \leq g\}$ félcsoport E-unitér fedője S-nek. Ezzel a 2.5. Tételnek egy (D. B. McAlister eredeti bizonyításánál lényegesen egyszerűbb) bizonyítását adtuk meg. Az előző E-unitér fedőhöz hasonlóan inverz félcsoportok bármely E-unitér fedője megkapható alkalmas faktorizálható inverz monoidba való beágyazásokból, amint D. B. McAlister és N. R. Reilly következő tétele mutatja.

2.8. Tétel. [MR] *Legyen S inverz félcsoport, $\iota\colon S \to M$ pedig S beágyazása faktorizálható inverz monoidba. Ekkor az $S \times U(M)$ direkt szorzat*

$$\{(s, g) \in S \times U(M) : s\iota \leq g\}$$

részfélcsoportja E-unitér fedője az S félcsoportnak. Fordítva, S minden E-unitér fedője előáll ezen a módon.

Az alábbi tétel inverz monoidok esetén a szemidirekt szorzatok homomorf képeit jellemzi, és D. B. McAlister egy általánosabb eredményéből következik.

2.9. Tétel. [McA2] *Legyen M inverz monoid. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) *M faktorizálható,*

(ii) *M valamely félháló monoid csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe,*

(iii) *M valamely félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatának homomorf képe.*

Az S inverz félcsoport A részhalmazát *megengedő halmaznak* nevezzük, ha A rendezésideálja S-nek (a természetes rendezésre nézve), és bármely $a, b \in A$ esetén $ab^{-1}, a^{-1}b \in E(S)$. Jelölje $C(S)$ az S inverz félcsoport megengedő részhalmazainak halmazát. Mivel megengedő halmazok szorzata is megengedő, ezért $C(S)$ a komplexusszorzással félcsoportot alkot. Ellenőrizhető, hogy $C(S)$ inverz monoid, $E(S)$ egységelemmel. Az S inverz félcsoportot *majdnem faktorizálhatónak* nevezzük, ha bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $A \in U(C(S))$, amelyre $s \in A$. A majdnem faktorizálható inverz félcsoportokat először D. B. McAlister vizsgálta, ő azonban fedő félcsoportoknak nevezte őket, és nem a megengedő halmazok, hanem parciális transzlációk segítségével definiálta. A fenti definíció M. V. Lawsontól származik. Mivel ortodox félcsoportokra sem a parciális transzlációk, sem a megengedő halmazok fogalma nem általánosítható, szükségünk van a majdnem faktorizálható inverz félcsoportok egy új jellemzésére.

2.10. Tétel. [Ha2] *Egy S inverz félcsoport esetén az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) *S majdnem faktorizálható,*

(ii) *bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $e \in E(S)$ és $(\lambda, \rho) \in \Sigma(S)$, amelyre $s = e\rho$,*

(iii) *bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $e \in E(S)$ és $(\lambda, \rho) \in \Sigma(S)$, amelyre $s = \lambda e$.*

A majdnem faktorizálható inverz félcsoportok éppen a szemidirekt szorzatok homomorf képei, amint azt D. B. McAlister alábbi tétele mutatja.

2.11. Tétel. [McA2] *Egy S inverz félcsoport pontosan akkor majdnem faktorizálható, ha félháló csoporttal vett szemdirekt szorzatának (idempotens-szétválasztó) homomorf képe.*

A faktorizálható inverz monoidok és a majdnem faktorizálható inverz félcsoportok kapcsolatára mutat rá M. V. Lawson alábbi tétele.

2.12. Tétel. [La2] *Ha M faktorizálható inverz monoid, akkor $M \setminus U(M)$ majdnem faktorizálható inverz félcsoport. Fordítva, bármely majdnem faktorizálható inverz félcsoport megkapható így egy faktorizálható inverz monoidból.*

Ortodox félcsoportok. Azt mondjuk, hogy egy E-unitér reguláris félcsoport *beágyazható*, ha beágyazható kötegnek csoporttal vett szemidirekt szorzatába. Ha az S beágyazható E-unitér reguláris félcsoport olyan szemidirekt szorzatba ágyazható be, amelynek köteg tényezője eleme az $E(S)$ köteg által generált varietásnak, akkor S-et *közelre beágyazhatónak* nevezzük. M. B. Szendrei és K. Takizawa egymástól függetlenül bebizonyította, hogy a 2.5. Tétel általánosítható ortodox félcsoportokra is.

2.13. Tétel. [Sze1],[Ta] *Minden ortodox félcsoportnak van E-unitér fedője.*

B. Billhardt bebizonyította, hogy a 2.6. Tétel már nem általánosítható ortodox félcsoportokra.

2.14. Tétel. [Bi] *Létezik olyan E-unitér reguláris félcsoport, amely nem ágyazható be köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatába.*

M. B. Szendrei [Sze2]-ben a közelre beágyazhatóságnak egy ekvivalens feltételét adta meg, és ezt felhasználva bebizonyította a következő tételeket.

2.15. Tétel. [Sze2] *A reguláris köteggel rendelkező E-unitér reguláris félcsoportok közelre beágyazhatók.*

2.16. Tétel. [Sze3] *Biszabad ortodox félcsoportok idempotenstiszta homomorf képei közelre beágyazhatók. Következésképpen bármely ortodox félcsoportnak van közelre beágyazható E-unitér fedője.*

Az utóbbi tétel az inverz félcsoportokra vonatkozó 2.5. és 2.6. Tételek közös általánosításának tekinthető.

3. Csoportvarietások feletti E-unitér fedők

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy bármely E-unitér reguláris félcsoport izomorf egy gráf-félcsoporttal, majd ezt felhasználva megadjuk E-unitér fedőknek egy bő osztályát. Végül ezt az eredményt felhasználva bebizonyítjuk, hogy bármely nemtriviális, és az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz megadható olyan E-unitér reguláris félcsoport, amely rendelkezik a következő három tulajdonsággal: (a) nem beágyazható, (b) legnagyobb csoport homomorf képe az adott varietásban van, és (c) nincs beágyazható E-unitér fedője az adott csoportvarietás felett.

Első lépésként megmutatjuk, hogy minden E-unitér reguláris félcsoport előáll $S(\mathcal{G},\delta)$ alakban alkalmas $\mathcal{G}$ gráffal és δ kongruenciával.

3.1. Tétel. *Ha S E-unitér reguláris félcsoport, akkor létezik olyan $\mathcal{G}$ gráf és δ kongruencia, amelyekre $S(\mathcal{G},\delta)\cong S$.*

Bizonyítás: Jelölje G az S/σ csoportot. Legyen $X\subseteq S$, és minden $x\in X$-re válasszuk ki az x egy x' inverzét oly módon, hogy az

$$\overline{X}=\{x,x' : x\in X\}$$

halmaz generálja S-et. Legyen $\chi\colon X\to G$ az a leképezés, amely tetszőleges $x\in X$ elemhez $x\sigma$-t rendeli. Ekkor $X\chi$ generálja G-t, vagyis (G,X,χ) egy X-generált csoport. Jelöljük a $\mathcal{G}(G,X,\chi)$ gráfot röviden $\mathcal{G}$-vel.

Legyenek továbbá

$$\begin{aligned} p &= {}^{a_1}\underline{x_1}\cdot{}^{a_2}\underline{x_2}\cdot\ldots\cdot{}^{a_l}\underline{x_l},\\ q &= {}^{b_1}\underline{y_1}\cdot{}^{b_2}\underline{y_2}\cdot\ldots\cdot{}^{b_k}\underline{y_k}\end{aligned}$$

elemei $\mathcal{G}^{\oplus}(a,b)$-nek. Vegyük észre, hogy ekkor $x_1\chi\cdot x_2\chi\cdot\ldots\cdot x_l\chi=a^{-1}b$, továbbá hogy $a_1,\ldots,a_l$-et egyértelműen meghatározza $a,x_1,\ldots,x_l$. Definiáljuk a δ relációt a következőképpen:

$$(p,q)\in\delta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x_1x_2\ldots x_l=y_1y_2\ldots y_k$$

Könnyen látható, hogy δ kongruencia $\mathcal{G}^{\oplus}$-on. Mivel a,b nem szerepel a definíciójában, ezért G-kongruencia is.

Ha $p\in\mathcal{G}^{\oplus}(1,1)$, ahol 1 a G csoport egységeleme, akkor előző észrevételünk alapján $1=x_1\chi\ldots x_l\chi=x_1\sigma\ldots x_l\sigma=(x_1\ldots x_l)\sigma$. Mivel S E-unitér, ezért σ idempotenstiszta, vagyis $x_1\ldots x_l$ idempotens eleme S-nek. Emiatt $(p,p^2)\in\delta$, vagyis $\{(p,p^2) : p\in\mathcal{G}^{\oplus}(1,1)\}\subseteq\delta$. Azonban $\beta_{\mathbf{B}}$ bilokális (lásd [Sze5]-ben), ami azt jelenti, hogy ez a halmaz generálja $\beta_{\mathbf{B}}$-t (mint G-kongruenciát), ezért $\beta_{\mathbf{B}}\subseteq\delta$. Vagyis a 2.4. Tétel szerint $S(\mathcal{G},\delta)$ E-unitér reguláris félcsoport.

Definiáljuk a $\iota\colon S(\mathcal{G},\delta)\to S$ leképezést a következőképpen:

$$(({}^{a_1}\underline{x_1}\ldots{}^{a_l}\underline{x_l})\delta)\iota=x_1x_2\ldots x_l.$$

Ekkor a δ reláció definíciójából látszik, hogy ι jóldefiniált. Legyen

$$p = {}^{a_1}\underline{x_1} \dots {}^{a_l}\underline{x_l} \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, a)$$

és

$$q = {}^{b_1}\underline{y_1} \dots {}^{b_k}\underline{y_k} \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, b).$$

Ekkor

$$(p\delta \cdot q\delta)\iota = ({}^{a_1}\underline{x_1} \dots {}^{a_l}\underline{x_l} \cdot {}^{ab_1}\underline{y_1} \dots {}^{ab_k}\underline{y_k})\delta\iota =$$

$$x_1 \dots x_l \cdot y_1 \dots y_k = (p\delta)\iota(q\delta)\iota,$$

vagyis ι homomorfizmus. Mivel $(\underline{x}\delta)\iota = x$ és $({}^{(x\chi)^{-1}}\underline{x}'\delta)\iota = x'$, ezért $\overline{X}$, ami S egy generátorrendszere, része ι képhalmazának. Így ι szürjektív. Injektív is, hiszen ha $(p\delta)\iota = (q\delta)\iota$, akkor $(x_1 \dots x_l)\sigma = (y_1 \dots y_k)\sigma = a$ miatt $p, q \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, a)$, így δ definíciója szerint $(p, q) \in \delta$. Tehát ι izomorfizmus $S(\mathcal{G}, \delta)$-ról S-re. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

■

Legyenek (G, X, χ) és $(\hat{G}, X, \hat{\chi})$ X-generált csoportok, valamint $\varphi\colon \hat{G} \to G$ X-homomorfizmus. Jelölje $\mathcal{G}$, illetve $\hat{G}$ a $\mathcal{G}(G, X, \chi)$, illetve $\mathcal{G}(\hat{G}, X, \underline{\hat{\chi}})$ gráfokat. Legyen továbbá $S(\mathcal{G}, \delta)$ E-unitér reguláris félcsoport. Ha $x \in \overline{X}$, akkor ezen gráf $(1, x)$ élét jelölje $\underline{\hat{x}}$. Ekkor az $A(\hat{\mathcal{G}}) \to A(\mathcal{G})$, ${}^{a}\underline{\hat{x}} \mapsto {}^{a\varphi}\underline{x}$ leképezés egyértelmű módon kiterjeszthető egy, a $'$ műveletet megőrző $\hat{\varphi}\colon A(\hat{\mathcal{G}})^{\oplus} \to A(\mathcal{G})^{\oplus}$ homomorfizmussá. Ha $p, q \in A(\hat{\mathcal{G}}^{\oplus})$ egymást követő $\hat{\mathcal{G}}$-beli séták, akkor $p\hat{\varphi}$ és $q\hat{\varphi}$ is egymást követő $\mathcal{G}$-beli séták, és $(pq)\hat{\varphi} = (p\hat{\varphi})(q\hat{\varphi})$.

Definiáljuk a következő kongruenciát a $\hat{\mathcal{G}}^{\oplus}$ félgrupoidon:

$$\hat{\delta} = \{(p, q) \in \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(a, b) \times \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(a, b) : a, b \in \hat{G} \text{ és } (p\hat{\varphi}, q\hat{\varphi}) \in \delta\}.$$

Nyilván $\hat{\delta}$ $\hat{G}$-kongruencia. Ezt a $\hat{G}$-kongruenciát δ φ *melletti teljes inverz képének* hívjuk.

3.2. Lemma. *A $\hat{\delta}$ $\hat{G}$-kongruenciát generálja a*

$$\theta = \{(p, q) : p, q \in \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(1, 1) \text{ és } (p\hat{\varphi}, q\hat{\varphi}) \in \delta\} \cup \beta_{\mathbf{B}}$$

reláció.

Bizonyítás: Jelölje ϵ a θ által generált $\hat{G}$-kongruenciát. Nyilván $\epsilon \subseteq \hat{\delta}$, ezért azt kell bizonyítani, hogy $\hat{\delta} \subseteq \epsilon$. Ehhez legyen $p, q \in \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(a, b)$ úgy, hogy $(p, q) \in \hat{\delta}$. Vagyis $(p\hat{\varphi}, q\hat{\varphi}) \in \delta$. Ekkor $(q'q, q'p) \in \epsilon$, mert $q'q, q'p \in \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(b, b)$ és $((q'q)\hat{\varphi}, (q'p)\hat{\varphi}) \in \delta$. Ezért $q \;\epsilon\; qq'q \;\epsilon\; qq'p$ és hasonlóképpen $p \;\epsilon\; qp'p$. Vagyis $q \;\epsilon\; qq'p \;\epsilon\; qq'qp'p \;\epsilon\; qp'p \;\epsilon\; p$. Tehát $\hat{\delta} \subseteq \epsilon$, vagyis $\hat{\delta} = \epsilon$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

■

3.3. Tétel. *Legyenek* (G, X, χ) *és* $(\hat{G}, X, \hat{\chi})$ X*-generált csoportok, és legyen* $\varphi\colon \hat{G} \to G$ X*-homomorfizmus. Definiáljuk a* $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, X, \chi)$*, illetve a* $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(\hat{G}, X, \hat{\chi})$ *gráfokat. Legyen továbbá* $S(\mathcal{G}, \delta)$ *gráf-félcsoport, és jelölje* $\hat{\delta}$ *a* δ G*-kongruencia* φ *melletti teljes inverz képét. Ekkor* $S(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\delta})$ $\hat{G}$ *feletti* E*-unitér fedője az* $S(\mathcal{G}, \delta)$ E*-unitér reguláris félcsoportnak.*

Fordítva, ha T E*-unitér fedője az* $S(\mathcal{G}, \delta)$ *félcsoportnak, akkor* T*-nek van olyan* T' *reguláris részfélcsoportja, amely szintén* E*-unitér fedője* T*-nek, és izomorf egy* $S(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\delta})$ *gráf-félcsoporttal, ahol* $\hat{\mathcal{G}}$ *és* $\hat{\delta}$ *a* $\mathcal{G}$ *gráfból, illetve a* δ G*-kongruenciából az előző bizonyításban ismertetett módon adódik.*

Bizonyítás: Mivel $\beta_{\mathbf{B}} \subseteq \hat{\delta}$, ezért a 2.4. Tétel szerint $S(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\delta})$ E-unitér, legnagyobb csoport homomorf képe pedig $\hat{G}$. Definiáljuk a $\psi\colon S(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\delta}) \to S(\mathcal{G}, \delta)$ leképezést úgy, hogy $(p\hat{\delta})\psi = (p\hat{\varphi})\delta$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ψ jóldefiniált, valamint hogy homomorfizmus. Mivel

$$(\underline{\hat{x}}\hat{\delta})\psi = \underline{x}\delta \quad \text{és} \quad ({}^{(x\hat{\chi})^{-1}}\underline{\hat{x}}'\hat{\delta})\psi = {}^{(x\chi)^{-1}}\underline{x}'\delta,$$

az $\{\underline{x}\delta, {}^{(x\chi)^{-1}}\underline{x}'\delta : x \in X\}$ halmaz, amely generálja $S(\mathcal{G}, \delta)$-t, része ψ képhalmazának. Így ψ szürjektív is. Ha $p, q \in \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(1,1)$ és $(p\hat{\delta})\psi = (q\hat{\delta})\psi$, akkor $(p\hat{\varphi})\delta = (q\hat{\varphi})\delta$, vagyis $(p, q) \in \hat{\delta}$. Tehát ψ idempotens-szétválasztó. Ezzel a tétel első felét bebizonyítottuk.

A második feléhez legyen $\psi\colon T \to S(\mathcal{G}, \delta)$ szürjektív, idempotens-szétválasztó homomorfizmus. Ekkor minden $x \in X$ esetén létezik olyan $s_x \in T$ és $s_x' \in V(s_x)$, amelyre $s_x\psi = \underline{x}\delta$ és $s_x'\psi = {}^{(x\chi)^{-1}}\underline{x}'\delta$ (lásd például [Ho]-ban). Jelölje T' az $\{s_x, s_x' : x \in X\}$ által generált részfélcsoportot T-ben. Ekkor T' szintén E-unitér fedője $S(\mathcal{G}, \delta)$-nak. A 3.1. Tétel bizonyítása alapján létezik olyan $\iota\colon S(\hat{\mathcal{G}}, \rho) \to T'$ izomorfizmus, ahol $\hat{\mathcal{G}} = (\hat{G}, X, \hat{\chi})$ valamely $(\hat{G}, X, \hat{\chi})$ X-generált csoportra és ρ kongruenciára, amelyre $(\underline{\hat{x}}\rho)\iota = s_x$ és $({}^{(x\hat{\chi})^{-1}}\underline{\hat{x}}'\rho)\iota = s_x'$ minden $x \in X$ esetén. Most megmutatjuk, hogy $\rho = \hat{\delta}$. Jelölje a $\iota\psi$ idempotens-szétválasztó homomorfizmust φ. Ekkor φ meghatároz egy X-homomorfizmust $(\hat{G}, X, \hat{\chi})$-ról (G, X, χ)-re, ahol $\hat{G}$ az $S(\hat{\mathcal{G}}, \rho)$, G pedig az $S(\mathcal{G}, \delta)$ gráf-félcsoport legnagyobb csoport homomorf képe. Mivel

$$(\underline{\hat{x}}\rho)\varphi = \underline{x}\delta \quad \text{és} \quad ({}^{(x\hat{\chi})^{-1}}\underline{\hat{x}}'\rho)\varphi = {}^{(x\chi)^{-1}}\underline{x}'\delta,$$

az előző lemma előtt említett $\hat{\varphi}\colon A(\hat{\mathcal{G}})^{\oplus} \to A(\mathcal{G})^{\oplus}$ homomorfizmus definiálható, és ekkor bármely $p \in A(\hat{\mathcal{G}}^{\oplus})$ esetén $(p\rho)\varphi = (p\hat{\varphi})\delta$. Mivel φ jóldefiniált, ezért szükségképpen $\rho \subseteq \hat{\delta}$. Hasonlóképpen, mivel φ idempotens-szétválasztó,

$$\{(p, q) : p, q \in \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(1,1), (p\hat{\varphi}, q\hat{\varphi}) \in \delta\} \subseteq \rho.$$

A ρ kongruencia természetesen tartalmazza $\beta_{\mathbf{B}}$-t, ezért az előző lemma alapján $\hat{\delta} \subseteq \rho$, vagyis $\rho = \hat{\delta}$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

∎

Az alábbi tétel E-unitér reguláris félcsoportok beágyazhatóságára ad szükséges feltételt.

3.4. Tétel. [Bi] *Legyen $a, a', b, b', e, f, g \in S$, ahol S beágyazható E-unitér reguláris félcsoport. Ekkor ha*

$$\begin{aligned} &\text{(N1)} \quad a \,\sigma\, b,\ a' \in V(a),\ b' \in V(b) \text{ és } e, f, g \in E(S), \\ &\text{(N2)} \quad eaa' = e,\ ebb' = e, \\ &\qquad\quad a'afg = fg,\ b'bfa'eafg = fa'eafg, \end{aligned}$$

akkor

$$\text{(N3)} \quad eafg = ebfa'eafg.$$

M. B. Szendrei ezen tétel alapján [Sze4]-ben megadott egy olyan véges gráf-félcsoportot, amely nem beágyazható. Most ismertetjük ezt a konstrukciót.

Legyen $X = \{a, b, e, f, g\}$ halmaz és $\chi\colon X \to \mathbf{Z}_2$ az X azon leképezése a kételemű additív csoportba, melyre $a\chi = b\chi = 1$ és $e\chi = f\chi = g\chi = 0$. Jelölje $\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}(\mathbf{Z}_2, X, \chi)$ gráfot. Jelölje δ a $\mathcal{G}^{\oplus}$ félgrupoid $\beta_{\mathbf{LSR}} \cup \theta$ által generált $\mathbf{Z}_2$-kongruenciáját, ahol

$$\theta = \{(\underline{eaa'}, \underline{e}), (\underline{ebb'}, \underline{e}), (\underline{a'}\,\underline{a}^1\underline{f}^1\underline{g}, {}^1\underline{f}^1\underline{g}), (\underline{b'}\,\underline{b}^1\underline{f}\,\underline{a'}\,\underline{ea}^1\underline{f}^1\underline{g}, {}^1\underline{f}\,\underline{a'}\,\underline{ea}^1\underline{f}^1\underline{g})\}.$$

Séták kombinatorikus tulajdonságait vizsgálva bizonyítható az alábbi állítás:

3.5. Állítás. [Sze4] *Az $\underline{ea}^1\underline{f}^1\underline{g}$ és $\underline{eb}^1\underline{f}\,\underline{a'}\,\underline{ea}^1\underline{f}^1\underline{g}$ séták nincsenek δ relációban.*

A 3.4. Tétel és ezen állítás következménye az alábbi tétel.

3.6. Tétel. [Sze4] *Az $S(\mathcal{G}(\mathbf{Z}_2, X, \chi), \delta)$ E-unitér reguláris félcsoport nem beágyazható.*

Mivel a 3.4. Tétel (N2) és (N3) része idempotensek egyenlőségét követeli meg, ha beágyazható E-unitér fedőt keresünk ezen gráf-félcsoportnak, csak az (N1) részben szereplő $a \,\sigma\, b$ feltételt lehet 'elrontani'. Ezt a jelen esetben könnyű megtenni, elég ugyanis olyan $(\hat{G}, X, \hat{\chi})$ csoport-fedőt találni a $(\mathbf{Z}_2, X, \chi)$ X-generált csoporthoz, amelyre $a\hat{\chi} \neq b\hat{\chi}$. Ha azonban az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ éleket lecseréljük alkalmas p és q sétákra, akkor a $(p\delta)\sigma \neq (q\delta)\sigma$ feltétel csak abban az esetben lesz biztosítható, ha elhagyjuk a kiindulási csoport varietását. Ez az ötlet áll a következő konstrukció hátterében.

Legyen $\mathbf{V}$ tetszőleges, az összes csoportok varietásától és a triviális varietástól különböző csoportvarietás. Mivel $\mathbf{V}$ nem az összes csoportok varietása, ezért kielégít egy nemtriviális $p = q$ azonosságot. Tegyük fel, hogy a p,q-ban előforduló változók $x_1, \dots, x_n$. Jelöljük G-vel az $x_1, \dots, x_n$ elemek által generált szabad csoportot $\mathbf{V}$-ben. Legyen $\hat{X} = \{x_1, \dots, x_n, e, f, g\}$, $\hat{\chi}\colon \hat{X} \to G$ pedig az a leképezés, amelyre $x_i\hat{\chi} = x_i$ és $e\hat{\chi} = f\hat{\chi} = g\hat{\chi} = 1$, a G csoport egységeleme. Tekintsük a $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(G, \hat{X}, \hat{\chi})$ gráfot. Ekkor a p és q, $\{x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}\}$ fölötti szavaknak megfelel $\hat{\mathcal{G}}$-ban egy-egy séta, mégpedig a $p = y_1y_2 \dots y_k$ $(y_1, \dots, y_k \in \{x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}\})$ szónak a $\hat{p} = \underline{y_1}\,{}^{y_1}\underline{y_2} \dots {}^{y_1 \dots y_{k-1}}\underline{y_k}$ séta, ahol $\underline{x_i^{-1}} = {}^{x_i^{-1}}\underline{x_i}'$. Legyen $\hat{q}'$ a $\hat{q}$ séta inverze. Mivel a $p = q$ azonosság nem triviális, és a $\mathbf{V}$ varietás sem az, ezért feltehető, hogy a $\hat{p}\hat{q}'$ zárt séta kör. Következésképpen p és q út. Jelöljük A-val a p út végpontját. Természetesen ekkor A egyben a q út végpontja is. Legyen $i(p)$ és $i(q)$ a p, illetve q szavak első betűje. Amennyiben $i(p) = i(q)^{-1}$, szorozzuk meg p-t és q-t balról $i(p)$-vel. Ezt az átalakítást ismételve elérhető, hogy $i(p) \neq i(q)^{-1}$ legyen.

Legyen

$$\hat{\theta} = \{(\underline{e}\hat{p}\hat{p}', \underline{e}), (\underline{e}\hat{q}\hat{q}', \underline{e}), (\hat{p}'\hat{p}\,{}^{A}\underline{f}\,{}^{A}\underline{g},\ {}^{A}\underline{f}\,{}^{A}\underline{g}), (\hat{q}'\hat{q}\,{}^{A}\underline{f}\hat{p}'\underline{e}\hat{p}\,{}^{A}\underline{f}\,{}^{A}\underline{g}, \hat{p}'\underline{e}\hat{p}\,{}^{A}\underline{f}\,{}^{A}\underline{g})\}$$

reláció $\hat{\mathcal{G}}^{\oplus}$-on. Jelöljük $\hat{\delta}$-pal a $\beta_{\mathbf{LSR}}(A(\mathcal{G})) \cup \hat{\theta}$ által generált G-kongruenciát $\hat{\mathcal{G}}^{\oplus}$-on. Ekkor $\hat{\delta}$ éppen a $\beta_{\mathbf{LSR}}(A(\hat{\mathcal{G}})) \cup {}^{G}\hat{\theta}$ reláció által generált kongruencia.

3.7. Tétel. *Az $S(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\delta})$ félcsoport nem beágyazható.*

Bizonyítás: A $\hat{p}\hat{\delta}$, ${}^{A^{-1}}\hat{p}'\hat{\delta}, \hat{q}\hat{\delta}$, ${}^{A^{-1}}\hat{q}'\hat{\delta}, \underline{e}\hat{\delta}, \underline{f}\hat{\delta}, \underline{g}\hat{\delta} \in S(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\delta})$ elemek $\hat{\theta}$ definíciója miatt teljesítik az (N1) és (N2) feltételeket. A 3.5. Állítást felhasználva most megmutatjuk, hogy az (N3) feltételt azonban nem teljesítik, azaz hogy $(\underline{e}\hat{p}\,{}^{A}\underline{f}\,{}^{A}\underline{g}, \underline{e}\hat{q}\,{}^{A}\underline{f}\hat{p}'\underline{e}\hat{p}\,{}^{A}\underline{f}\,{}^{A}\underline{g}) \notin \hat{\delta}$.

Először megadunk egy $\varphi\colon A(\hat{\mathcal{G}})^{\oplus} \to A(\mathcal{G})^{\oplus} \cup \{\epsilon\}$ homomorfizmust, ahol ϵ az üres szó. Tetszőleges $(B, x) \in A(\hat{\mathcal{G}})$ esetén legyen

$$(B, x)\varphi = \begin{cases} \epsilon & \text{ha } B, B \cdot x\hat{\chi}, x\hat{\chi} \neq 1, \\ (1, x) & \text{ha } B \neq 1, x\hat{\chi} = 1, \\ (1, a) & \text{ha } B, x\hat{\chi} \neq 1, B \cdot x\hat{\chi} = 1, \\ (0, x) & \text{ha } B = 1, x\hat{\chi} = 1, \\ (0, a) & \text{ha } B = 1, x = i(p), \\ (0, b) & \text{ha } B = 1, x\hat{\chi} \neq 1, x \neq i(p). \end{cases}$$

Ezek után φ természetes módon kiterjeszthető először $A(\hat{\mathcal{G}})^{\oplus}$ szabad generátorrendszerére úgy, hogy ${}^{B}\underline{x}'\varphi = ({}^{B}\underline{x}\varphi)'$ legyen, majd ezek után $A(\hat{\mathcal{G}})^{\oplus}$-ra. Vegyük észre, hogy ekkor φ sétákat (esetleg üres) sétába visz, azonban az 1 kezdőpontú séták képe sohasem üres. Továbbá φ a $\hat{\theta}$ reláció elemeit éppen θ megfelelő elemeibe viszi, és ha $(p,q) \in \beta_{\mathbf{LSR}}(A(\hat{\mathcal{G}}))$, akkor $(p\varphi, q\varphi) \in \beta_{\mathbf{LSR}}(A(\mathcal{G}))$.

Tegyük fel, hogy $(\underline{e}\hat{p}\,{}^A\underline{f}\,{}^A\underline{g}, \underline{e}\hat{q}\,{}^A\underline{f}\hat{p}'\underline{e}\hat{p}\,{}^A\underline{f}\,{}^A\underline{g}) \in \hat{\delta}$. Legyen ekkor $p_0, \ldots, p_k$ egy $\underline{e}\hat{p}\,{}^A\underline{f}\,{}^A\underline{g} \to \underline{e}\hat{q}\,{}^A\underline{f}\hat{p}'\underline{e}\hat{p}\,{}^A\underline{f}\,{}^A\underline{g}$ átalakítás. Mivel a sétákban szereplő hurokélek halmazát az elemi átalakítások nem változtatják meg, a $p_0, p_1, \ldots, p_k$ sétákban ugyanazok a hurokélek, vagyis $\underline{e}$, ${}^A\underline{f}$, ${}^A\underline{g}$ szerepelnek csak. Ebben az esetben azonban ezen átalakítás során nem használható ${}^G\hat{\theta}$ minden eleme, hanem csak azok, amelyekben ezek a hurokélek szerepelnek. Vagyis csak $\hat{\theta}$ elemei használhatók. Mivel φ a $\hat{\theta}$ relációt éppen θ-ba viszi, ezért ekkor a $p_0\varphi, p_1\varphi, \ldots, p_k\varphi$ sorozat egy $\underline{ea}^1\underline{f}^1\underline{g} = p_0\varphi \to p_k\varphi = \underline{eb}^1\underline{f}\underline{a}'\underline{ea}^1\underline{f}^1\underline{g}$ átalakítás. Ez ellentmond a 3.5. Állításnak, vagyis $(\underline{e}\hat{p}\,{}^A\underline{f}\,{}^A\underline{g}, \underline{e}\hat{q}\,{}^A\underline{f}\hat{p}'\underline{e}\hat{p}\,{}^A\underline{f}\,{}^A\underline{g}) \notin \hat{\delta}$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

■

Végül felhasználva, hogy konstrukciónkban az adott csoportvarietás szabad objektuma szerepel, a fejezet fő eredményét igazoljuk.

3.8. Tétel. *Bármely* $\mathbf{V}$ *nemtriviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz létezik olyan* E*-unitér reguláris félcsoport, melynek legnagyobb csoport homomorf képe eleme* $\mathbf{V}$*-nek, azonban nincs* $\mathbf{V}$ *fölötti beágyazható* E*-unitér fedője.*

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy az $S = S(\hat{\mathcal{G}}, \hat{\delta})$ E-unitér reguláris félcsoport rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Legyen $T = S(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\delta})$ olyan E-unitér fedője S-nek, amely a 3.3. Tételben szerepel, $\tilde{G}$ pedig legyen a T félcsoport legnagyobb csoport homomorf képe. A G csoport az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ által generált szabad csoport a $\mathbf{V}$ varietásban. Ugyanakkor a 3.3. Tétel bizonyítása alapján $\tilde{G}$ is n elem által generált csoport, ráadásul $\tilde{G}$-nak G olyan homomorfizmus melletti képe, amely $\tilde{G}$ generátorrendszerének elemeit G szabad generátorrendszerének elemeibe viszi. Ha $\tilde{G} \in \mathbf{V}$, akkor ebből következik, hogy $\tilde{G} \cong G$. Ebben az esetben feltehető, hogy $\tilde{G} = G$. Mivel $\hat{\delta}$-ot generálja a $\{(p,q) : p, q \in \hat{\mathcal{G}}^{\oplus}(1,1), p\ \hat{\delta}\ q\}$ halmaz, szükségképpen $\tilde{\delta} = \hat{\delta}$ teljesül, azaz $T \cong S$. A 3.3. Tétel szerint tehát S bármely $\mathbf{V}$ feletti E-unitér fedője tartalmaz S-sel izomorf részfélcsoportot, így nem lehet beágyazható.

■

A 2.16. Tétel szerint minden véges ortodox félcsoportnak van beágyazható E-unitér fedője, azonban ez a fedő végtelen. Ez az észrevétel természetes módon vezet a következő problémához.

3.9. Probléma. *Van-e minden véges ortodox félcsoportnak véges beágyazható* E*-unitér fedője?*

4. Majdnem faktorizálható ortodox félcsoportok

Ebben a fejezetben szemidirekt szorzatok (idempotens-szétválasztó) homomorf képeit vizsgáljuk. A faktorizálható ortodox monoidok, valamint a majdnem faktorizálható ortodox félcsoportok definíciója M. B. Szendreitől származik, a 4.4. Tétel bizonyításával együtt. Először belátjuk, hogy ortodox monoidokra az inverz monoidokra vonatkozó tételek általánosításai érvényesek.

Legyen M ortodox monoid. Azt mondjuk, hogy M *faktorizálható*, ha bármely $s \in M$ esetén van olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, amelyekre $s = eu$. Az inverz félcsoportokhoz hasonlóan igaz, hogy az M ortodox monoid pontosan akkor faktorizálható, ha bármely $s \in M$ esetén létezik olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, amelyekre $s = ue$. Ez a definíció ekvivalens a T. S. Blyth és R. B. McFadden által [BM]-ben megadott egység ortodox félcsoport definíciójával. Az alábbi tétel az inverz félcsoportokra vonatkozó 2.9. Tétel általánosítása. Megemlítjük, hogy az (i) $\Rightarrow$ (ii) irányt R. B. McFadden [McF]-ben már bizonyította.

4.1. Tétel. *Az M ortodox monoidra az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) *M faktorizálható,*

(ii) *M valamely köteg monoid csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe,*

(iii) *M valamely köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának homomorf képe.*

Bizonyítás: Az (i) $\Rightarrow$ (ii) irány bizonyításához tegyük fel, hogy M faktorizálható. Definiáljuk az $U(M)$ csoport hatását az $E(M)$ kötegen a következőképpen: ha $u \in U(M)$ és $e \in E(M)$, legyen ${}^{u}e = ueu^{-1}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban csoporthatás, vagyis definiálható az $E(M) * U(M)$ szemidirekt szorzat. Vegyük észre, hogy $1 \in E(M)$, így $E(M)$ egységelemes köteg. Legyen $\varphi\colon E(M) * U(M) \to M$, $(e, u) \mapsto eu$. Ha $(e, u), (f, v) \in E(M) * U(M)$, akkor

$$((e, u)(f, v))\varphi = (e \cdot ufu^{-1}, uv)\varphi = eufv = (e, u)\varphi \cdot (f, v)\varphi,$$

vagyis φ homomorfizmus. Mivel M faktorizálható, ezért φ szürjektív, vagyis M előáll köteg monoid csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képeként.

A (ii) $\Rightarrow$ (iii) irány triviális.

A (iii) $\Rightarrow$ (i) irányhoz legyen B köteg, G olyan csoport, ami hat B-n, valamint $\varphi\colon B*G \to M$ szürjektív homomorfizmus. Legyen $e \in B$ rögzített úgy, hogy $(e,1)\varphi = 1$ (a Lallement-lemma miatt ilyen e létezik). Ekkor bármely $(e,a) \in B*G$ esetén

$$(e,a)\varphi = (e,a)\varphi(e,1)\varphi = (e \cdot {}^{a}e, a)\varphi = (e,1)\varphi({}^{a}e,a)\varphi = ({}^{a}e,a)\varphi.$$

Mivel $(e,1)\ \mathcal{R}\ (e,a)$, ezért

$$1 = (e,1)\varphi\ \mathcal{R}\ (e,a)\varphi = ({}^{a}e,a)\varphi\ \mathcal{R}\ ({}^{a}e,1).$$

Azonban az egységelem $\mathcal{R}$-osztályában nem lehet más idempotens, ezért $({}^{a}e,1)\varphi = 1$ bármely $a \in G$ esetén. Így $({}^{a^{-1}}e,1)\varphi = 1$ is teljesül. Ekkor az $(e,a)\ \mathcal{L}\ ({}^{a^{-1}}e,1)$ relációt felhasználva

$$1 = (e,1)\varphi\ \mathcal{R}\ (e,a)\varphi\ \mathcal{L}\ ({}^{a^{-1}}e,1)\varphi = 1$$

adódik, vagyis $(e,a)\varphi \in U(M)$. Tehát valahányszor $(f,1)\varphi = 1$ és $a,b \in G$, mindannyiszor $({}^{a}f,b)\varphi \in U(M)$. Legyen $s \in M$. Ekkor létezik olyan $(g,a) \in B*G$, amelyre $(g,a)\varphi = s$. Ekkor

$$(g,a)\varphi = (g,a)\varphi(e,1)\varphi = (g\,{}^{a}e,a)\varphi = (g,1)\varphi({}^{a}e,a)\varphi,$$

ahol $(g,1)\varphi \in E(M)$ és $({}^{a}e,a)\varphi \in U(M)$. Ezzel a tételt beláttuk.

■

Ortodox félcsoportok esetén transzlációk segítségével definiálható a majdnem faktorizálhatóság fogalma. A transzlációkkal való számolást segíti a következő lemma.

4.2. Lemma. *Legyen S reguláris félcsoport, legyen λ bal-, ρ jobbtranszlációja S-nek, valamint legyen $s \in S$. Ekkor $(\lambda s)\rho = \lambda(s\rho)$.*

Bizonyítás: Legyen $s' \in V(s)$. Ekkor $(\lambda s)\rho = (\lambda(ss's))\rho = ((\lambda s)\cdot s's)\rho = \lambda s \cdot (s's)\rho = \lambda(s \cdot (s's)\rho) = \lambda(s\rho)$.

■

Eme lemma mutatja, hogy ha transzlációkkal számolunk, akkor nincs szükség zárójelezésre. Ezért a továbbiakban a formulák egyszerűsítése érdekében csak akkor használunk zárójelet, ha az segít a gondolatmenet megértésében.

Azt mondjuk, hogy az S ortodox félcsoport *majdnem faktorizálható*, ha bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $e \in E(S)$ és $(\lambda,\rho) \in \Sigma(S)$, amelyre $s = e\rho$. Könnyen látható, hogy a fenti feltétel ekvivalens azzal, hogy bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $e \in E(S)$ és $(\lambda,\rho) \in \Sigma(S)$, amelyre $s = \lambda e$. Egy ortodox félcsoportot *gyengén fedhetőnek* nevezünk, ha előáll valamely szemidirekt szorzat homomorf képeként. A következő tétel az inverz félcsoportokra vonatkozó 2.11. Tétel általánosítása.

4.3. Tétel. *Egy ortodox félcsoport akkor és csak akkor majdnem faktorizálható, ha köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe.*

Bizonyítás: Legyen S majdnem faktorizálható ortodox félcsoport. Definiáljuk a $\Sigma(S)$ csoport hatását az $E(S)$ kötegen a következőképpen: ${}^{(\lambda,\rho)}e = \lambda e\rho^{-1}$. Belátjuk, hogy így tényleg csoporthatást definiáltunk. Először is,

$$\lambda e\rho^{-1} \cdot \lambda e\rho^{-1} = \lambda e \cdot (\lambda^{-1}\lambda)e\rho^{-1} = (\lambda e) \cdot (e\rho^{-1}) = \lambda e\rho^{-1},$$

vagyis $\lambda e\rho^{-1}$ idempotents. Legyen $(\lambda, \rho), (\sigma, \tau) \in \Sigma(S)$, valamint $e \in E(S)$. Ekkor

$${}^{(\lambda,\rho)}({}^{(\sigma,\tau)}e) = \lambda\sigma e\tau^{-1}\rho^{-1} = {}^{(\lambda\sigma,\rho\tau)}e.$$

Mivel ${}^{(\iota,\iota)}e = e$ is teljesül, ahol ι az S identikus leképezése, ezért $\Sigma(S)$ tényleg hat $E(S)$-en. Legyen $\varphi\colon E(S) * \Sigma(S) \to S,\ (e, (\lambda, \rho)) \mapsto e\rho$ leképezés. Ekkor φ nyilvánvaló módon idempotens-szétválasztó. Ha $(e, (\lambda, \rho)), (f, (\sigma, \tau)) \in E(S) * \Sigma(S)$, akkor

$$((e, (\lambda, \rho)) \cdot (f, (\sigma, \tau)))\varphi = (e \cdot (\lambda f\rho^{-1}), (\lambda\sigma, \rho\tau))\varphi =$$

$$(e \cdot \lambda f\rho^{-1})\rho\tau = e\rho \cdot f\tau = (e, (\lambda, \rho))\varphi \cdot (f, (\sigma, \tau))\varphi.$$

Vagyis a φ leképezés homomorfizmus. Mivel S majdnem faktorizálható, ezért φ szürjektív is, tehát a "csak akkor" irányt beláttuk.

A másik irányhoz legyen $\varphi\colon B * G \to S$ szürjektív idempotens-szétválasztó homomorfizmus. Tetszőleges $a \in G$ elemre definiálni szeretnénk egy λ_a baltranszlációt S-en. Legyen

$$\lambda_a((e, b)\varphi) = ({}^{a}e, ab)\varphi$$

minden $(e, b) \in B * G$ elemre. Először belátjuk, hogy λ_a jóldefiniált. Ha $(f, b)\varphi = (f', b')\varphi$, akkor $(f, b)\ \mathcal{H}\ (f', b')$, mert φ idempotens-szétválasztó. Így $f\ \mathcal{R}\ f'$, amiből következik, hogy ${}^{a}f\ \mathcal{R}\ {}^{a}f'$. Ekkor

$$\lambda_a((f, b)\varphi) = ({}^{a}f, ab)\varphi = (({}^{a}f, a) \cdot (f, b))\varphi = ({}^{a}f'\,{}^{a}f, a)\varphi \cdot (f, b)\varphi =$$

$$({}^{a}f'\,{}^{a}f, a)\varphi \cdot (f', b')\varphi = ({}^{a}f'\,{}^{a}f\,{}^{a}f', ab')\varphi = ({}^{a}f', ab')\varphi = \lambda_a((f', b')\varphi).$$

Tehát a λ_a leképezés valóban jóldefiniált. Szintén ellenőrizhető, hogy λ_a baltranszlációja S-nek.

Hasonlóképpen a $\rho_a\colon S \to S,\ (e, b)\varphi \mapsto (e, ba)\varphi$ leképezés jobbtranszlációja S-nek. A (λ_a, ρ_a) pár kapcsolt, mert

$$(f, b)\varphi \cdot \lambda_a((f', b')\varphi) = (f \cdot {}^{ba}f', bab')\varphi = ((f, b)\varphi)\rho_a \cdot (f', b')\varphi.$$

Továbbá a $(\lambda_{a^{-1}}, \rho_{a^{-1}})$ pár inverze a (λ_a, ρ_a) párnak, ezért $(\lambda_a, \rho_a) \in \Sigma(S)$. Legyen most $s \in S$. Mivel φ szürjektív, ezért létezik olyan $(e, a) \in B * G$, amelyre $(e, a)\varphi = s$. Ekkor azonban $s = (e, a)\varphi = ((e, 1)\varphi)\rho_a$, vagyis S majdnem faktorizálható. Ezzel a tételt beláttuk.

■

A következő tétel az inverz félcsoportokra vonatkozó 2.12. Tételt általánosítja.

4.4. Tétel. *Ha M faktorizálható ortodox monoid az $U(M)$ egységcsoporttal, akkor $M \backslash U(M)$ majdnem faktorizálható ortodox félcsoport. Fordítva, minden majdnem faktorizálható ortodox félcsoport megkapható így egy faktorizálható ortodox monoidból.*

Bizonyítás: Legyen M faktorizálható ortodox monoid, és legyen $S = M \setminus U(M)$. Először vegyük észre, hogy ha $st, t \in U(M)$ valamely $s, t \in M$ esetén, akkor $s \in U(M)$, hiszen $s = st \cdot t^{-1}$. Most ellenőrizzük, hogy S részfélcsoportja M-nek. Ehhez legyen $s, t \in S$. Az M monoid faktorizálható, ezért léteznek olyan $e, f \in E(M)$ és $u, v \in U(M)$ elemek, amelyekre $s = eu, t = fv$. Mivel $s, t \in S$, ezért $e, f \neq 1$. Ekkor $st = eufv = e(ufu^{-1})uv$. Mivel $f \neq 1$, ezért $ufu^{-1} \neq 1$, vagyis $e(ufu^{-1}) \neq 1$, mert köteg monoidban az egységelemtől különböző elemek szorzata nem lehet egységelem. Tehát az $e(ufu^{-1})$ idempotens nem egyenlő az egységelemmel, vagyis eleme S-nek. Azonban $uv \in U(M)$, ezért az előző észrevételünk miatt $st = e(ufu^{-1}) \cdot uv \in S$. Hasonlóképpen ellenőrizhető, hogy S reguláris, vagyis szükségképpen ortodox részfélcsoportja M-nek. Minden $u \in U(M)$ esetén definiáljuk a $\lambda_u \colon S \to S$, $s \mapsto us$ balról írt leképezést, valamint a $\rho_u \colon S \to S$, $s \mapsto su$ jobbról írt leképezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkettő bijektív, λ_u bal-, ρ_u pedig jobbtranszlációja S-nek, valamint hogy (λ_u, ρ_u) kapcsolt pár, melynek inverze $(\lambda_{u^{-1}}, \rho_{u^{-1}})$. Így $(\lambda_u, \rho_u) \in \Sigma(S)$. Legyen $s \in S$; ekkor M faktorizálhatósága miatt létezik olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, melyre $s = eu$. Természetesen $e \neq 1$, ezért $e \in E(S)$, így az $s = e\rho_u$ egyenlőség mutatja, hogy S majdnem faktorizálható.

A fordított irányhoz legyen S majdnem faktorizálható ortodox félcsoport. Legyen ekkor $M = S \cup \Sigma(S)$, és terjesszük ki S, valamint $\Sigma(S)$ szorzását M-re a következőképpen: $s \cdot (\lambda, \rho) = s\rho$, valamint $(\lambda, \rho) \cdot s = \lambda s$. Ellenőrizhető, hogy ekkor M faktorizálható ortodox monoid a $\Sigma(S)$ egységcsoporttal. Ezzel a tételt beláttuk.

■

A 2.11. Tétel alapján inverz félcsoportok esetén a szemidirekt szorzatok homomorf képei és idempotens-szétválasztó homomorf képei ugyanazok. A következő példa mutatja, hogy ortodox félcsoportok esetén a fenti két osztály már különböző.

4.5. Állítás. *Van olyan kombinatorikus teljesen 0-egyszerű gyengén fedhető ortodox félcsoport, amely nem majdnem faktorizálható.*

Bizonyítás: Egyszerű ellenőrizni, hogy ha $S = \mathcal{M}^0[\{1\}, I, \Lambda, Q]$ kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoport, ρ pedig bijektív jobbtranszlációja, akkor alkalmas $\rho' \colon \Lambda \to \Lambda$ permutációra ρ az alábbi alakú :

$$s\rho = \begin{cases} (i, j\rho') & \text{ha } s = (i,j) \\ 0 & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Hasonlóképpen, ha λ bijektív baltranszláció, akkor $\lambda(i,j) = (\lambda' i, j)$ az I halmaz valamely λ' permutációjára. Ha λ bijektív bal-, ρ pedig bijektív jobbtranszláció, akkor a (λ, ρ) pár pontosan akkor kapcsolt, ha $((i,j)\rho) \cdot (i',j') = (i,j) \cdot (\lambda(i',j'))$ bármely $(i,j), (i',j') \in S$ esetén. Mivel az előbbi két eleme S-nek csak úgy lehet különböző, ha az egyik 0, a másik pedig nem, ezért az előző feltétel ekvivalens azzal, hogy $q_{j\rho',i'} = q_{j,\lambda' i'}$. Vagyis (λ, ρ) akkor és csak akkor kapcsolt pár, ha $q_{j\rho',i} = q_{j,\lambda' i}$ minden $i \in I$ és $j \in \Lambda$ esetén.

Vegyük a $T = \mathcal{M}^0[\{1\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2\}, Q]$ kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoportot, ahol

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jelölje ρ' az $(1\ 2)$ permutációt, λ' pedig az $(1\ 3)(2\ 4)$ permutációt. Ekkor a ρ' által meghatározott ρ jobbtranszláció, valamint a λ' által meghatározott λ baltranszláció kapcsolt párt alkot, vagyis $(\lambda, \rho) \in \Sigma(T)$. Ugyanakkor bármely t nem-idempotens T-beli elemre $t\rho$ idempotens. Mivel $t = (t\rho)\rho^{-1}$, ezért T majdnem faktorizálható. Legyen $T' = \mathcal{M}^0[\{1\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, Q']$ az a kombinatorikus Rees-mátrixfélcsoport, ahol

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor T' a T homomorf képe, vagyis szükségképpen gyengén fedhető, azonban könnyen látható, hogy $|\Sigma(T')| = 1$, vagyis T' nem majdnem faktorizálható.

∎

Ezen lemma mutatja, hogy ortodox félcsoportok gyenge fedhetőségének vizsgálata bonyolultabb, mint az inverz félcsoportoké. Azonban ha az ortodox félcsoport kötege "közel" van a félhálókhoz (vegyük észre, hogy az állításban szereplő ortodox félcsoport kötege jobbnormális), akkor a helyzet lényegesen egyszerűbb. Normális kötegek esetén ugyanis a Green-relációk kongruenciát alkotnak. Ennek egyszerű következménye az alábbi állítás.

4.6. Lemma. *Ha B normális köteg, $e, f, x, \hat{e}, \hat{f} \in B$ úgy, hogy $e \mathcal{J} f$, $e = x\hat{e}$ és $f = x\hat{f}$, akkor $e \mathcal{R} f$. Duálisan, ha $e = \hat{e}x$ és $f = \hat{f}x$, akkor $e \mathcal{L} f$.*

Azt mondjuk, hogy az S ortodox félcsoport *általánosított inverz félcsoport*, ha $E(S)$ normális. A következőkben belátjuk, hogy egy általánosított inverz félcsoport pontosan akkor gyengén fedhető, ha legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.

Legyen S tetszőleges gyengén fedhető ortodox félcsoport, B pedig idempotenseinek kötege. Ekkor létezik $\eta \colon B' * G \to S$ szürjektív homomorfizmus valamely $B' * G$ szemidirekt szorzatról. Mivel $E(B' * G) = \{(e, 1) : e \in B'\}$ izomorf B'-vel, ezért minden $e \in B'$ elemet azonosítunk az $(e, 1) \in B' * G$ elemmel. Legyen $E = B'/\mathcal{J}$, valamint jelölje φ az η megszorítását B'-re. Mivel η szürjektív, ezért a Lallement-lemma miatt φ is szürjektív. Vegyük észre továbbá, hogy ha $e, f \in B'$ és $a \in G$ úgy, hogy $e \mathcal{J} f$, akkor ${}^{a}e \mathcal{J} {}^{a}f$. Tehát G hatása B'-n csoporthatást indukál a $B'/\mathcal{J} = E$ félhálón. Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\pi_{\mathcal{J}} \colon B' * G \to E * G,\ (e, a) \mapsto (e\mathcal{J}, a)$$

leképezés szürjektív homomorfizmus, aminek a magja $B' * G$ legkisebb inverz kongruenciája, $\gamma_{B' * G}$. A továbbiakban az S ortodox félcsoport legkisebb inverz kongruenciáját γ-val jelöljük. Mivel az $\eta\gamma^{\natural} \colon B' * G \to S/\gamma$ szürjektív homomorfizmus, ezért van olyan $\chi \colon E * G \to S/\gamma$ szürjektív homomorfizmus, amelyre $\eta\gamma^{\natural} = \pi_{\mathcal{J}}\chi$. Ez mutatja, hogy egy gyengén fedhető ortodox félcsoport legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható. A φ és χ homomorfizmusokat az $(e\varphi)\gamma = (e\mathcal{J}, 1)\chi$ egyenlőség kapcsolja össze. Legyen $(e, a) \in B' * G$. Vegyük észre, hogy mivel $\eta\gamma^{\natural} = \pi_{\mathcal{J}}\chi$, ezért

$$((e, a)\eta)\gamma = (e\mathcal{J}, a)\chi.$$

Továbbá, mivel $(e, a) \mathcal{R} (e, 1)$, ezért

$$(e, a)\eta \mathcal{R} (e, 1)\eta = e\varphi,$$

valamint hasonlóképp

$$(e, a)\eta \mathcal{L} ({}^{a^{-1}}e)\varphi$$

adódik.

A fenti észrevétel ötletet ad arra, hogyan próbálhatunk olyan szemidirekt szorzatot találni, amelynek homomorf képe egy olyan adott ortodox félcsoport, melynek legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható. Legyen S olyan ortodox félcsoport, amelyre S/γ majdnem faktorizálható. Jelölje S idempotenseinek a kötegét B. Legyen B' köteg, E a legnagyobb félháló homomorf képe, valamint legyen G olyan csoport, amely hat B'-n. Mint fentebb láttuk, ekkor G hat E-n is. Tegyük fel továbbá, hogy adottak a $\chi\colon E * G \to S/\gamma$, valamint $\varphi\colon B' \to B$ szürjektív homomorfizmusok úgy, hogy $(e\varphi)\mathcal{J} = (e\mathcal{J}, 1)\chi$ minden $e \in B'$ esetén. A következő lemma mutatja, hogy ekkor csak egy jelölt van az $\eta\colon B' * G \to S$ homomorfizmusra.

4.7. Lemma. *Ha $(e, a) \in B' * G$, akkor egyetlen olyan $s \in S$ létezik, amelyre $s\gamma = (e\mathcal{J}, a)\chi$, $s \mathrel{\mathcal{R}} e\varphi$ és $s \mathrel{\mathcal{L}} ({}^{a^{-1}}e)\varphi$. Következésképpen jól definiált az az $\eta\colon B' * G \to S$, $(e, a) \mapsto s$ leképezés, ahol s az előző tulajdonságokat teljesítő eleme S-nek.*

Bizonyítás: Legyen $(e, a) \in B' * G$. Vegyük észre, hogy

$$(e\varphi)\gamma = (e\mathcal{J}, 1)\chi \mathrel{\mathcal{R}} (e\mathcal{J}, a)\chi \mathrel{\mathcal{L}} (({}^{a^{-1}}e)\mathcal{J}, 1)\chi = (({}^{a^{-1}}e)\varphi)\gamma$$

az S/γ félcsoportban, így $e\varphi \mathrel{\mathcal{D}} ({}^{a^{-1}}e)\varphi$ az S félcsoportban. Az előző reláció azt is mutatja, hogy az $R_{e\varphi} \cap L_{({}^{a^{-1}}e)\varphi}$ $\mathcal{H}$-osztálynak és az $(e\mathcal{J}, a)\chi$ γ-osztálynak a metszete nemüres, ezért van olyan $s \in S$, amely kielégíti az adott feltételeket. Azonban $\mathcal{H} \cap \gamma$ az S identikus relációja, ezért az s elemet az adott feltételek egyértelműen meghatározzák.

■

A következő lemmában belátjuk, hogy általánosított inverz félcsoportok esetén a fenti η leképezés szükségképpen homomorfizmus.

4.8. Lemma. *Legyen S általánosított inverz félcsoport, B pedig idempotenseinek kötege. Tegyük fel, hogy adott a B' normális köteg, melynek legnagyobb félháló homomorf képe E, a G csoport, amely hat B'-n, valamint adottak a $\chi\colon E * G \to S/\gamma$ és a $\varphi\colon B' \to B$ szürjektív homomorfizmusok úgy, hogy $(e\varphi)\gamma = (e\mathcal{J}, 1)\chi$ bármely $e \in B'$ esetén. Definiáljuk az $\eta\colon B' * G \to S$, $(e, a) \mapsto s$, ahol $s\gamma = (e\mathcal{J}, a)\chi$, $s \mathrel{\mathcal{R}} e\varphi$ és $s \mathrel{\mathcal{L}} ({}^{a^{-1}}e)\varphi$ leképezést. Ekkor η szürjektív homomorfizmus.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy η homomorfizmus. Ehhez legyen $(e, a), (f, b) \in B' * G$, továbbá legyen $(e, a)\eta = s$ és $(f, b)\eta = t$. Mivel $(e, a)\eta \mathrel{\mathcal{R}} e\varphi$, ezért van olyan $s' \in V(s)$, hogy $ss' = e\varphi$. Hasonlóképpen létezik olyan $t' \in V(t)$, amelyre $t't = ({}^{b^{-1}}f)\varphi$. Azt kell megmutatnunk, hogy $((e, a) \cdot (f, b))\eta = st$. Definíció szerint azt kell ellenőriznünk, hogy

$$\begin{aligned}
(st)\gamma &= ((e, a) \cdot (f, b))\pi_{\mathcal{J}}\chi, \\
st &\mathrel{\mathcal{R}} (e \cdot {}^{a}f)\varphi, \\
st &\mathrel{\mathcal{L}} ({}^{(ab)^{-1}}e \cdot {}^{b^{-1}}f)\varphi.
\end{aligned}$$

Az első egyenlőség triviálisan teljesül, mert $\pi_{\mathcal{J}}$ és χ homomorfizmusok, vagyis

$$(st)\gamma = ((e \cdot {}^{a}f)\mathcal{J}, ab)\chi \,\mathcal{R}\, ((e \cdot {}^{a}f)\mathcal{J}, 1)\chi = ((e \cdot {}^{a}f)\varphi)\gamma.$$

Ez mutatja, hogy az $e\varphi \cdot ({}^{a}f)\varphi$ és $stt's' = e\varphi \cdot stt's'$ idempotensek a B köteg ugyanazon $\mathcal{J}$-osztályában vannak. Minthogy B normális köteg, ezért a 4.6. Lemma szerint ezen idempotensek $\mathcal{R}$-osztályát meghatározza a bal szélső szorzótényezőjük, ezért

$$e\varphi \cdot ({}^{a}f)\varphi \,\mathcal{R}\, e\varphi \cdot stt's' \,\mathcal{R}\, st.$$

Hasonlóképpen belátható, hogy

$$st \,\mathcal{L}\, ({}^{(ab)^{-1}}e \cdot {}^{b^{-1}}f)\varphi.$$

Tehát η homomorfizmus.

Most belátjuk, hogy η szürjektív. Legyen ehhez $s \in S$. Mivel χ és φ szürjektívek, ezért létezik olyan $(e, a) \in B' * G$ és $e', f' \in B'$, melyre $s\gamma = (e\mathcal{J}, a)\chi$, $e'\varphi \,\mathcal{R}\, s$ és $f'\varphi \,\mathcal{L}\, s$. Jelölje $\hat{e}$ az $e' \cdot e \cdot {}^{a}f'$ idempotenst. Ekkor

$$(\hat{e}\mathcal{J}, a)\chi = ((e' \cdot e \cdot {}^{a}f')\mathcal{J}, a)\chi = (e'\mathcal{J}, 1)\chi \cdot (e\mathcal{J}, a)\chi \cdot (f'\mathcal{J}, 1)\chi =$$

$$((e'\varphi) \cdot s \cdot (f'\varphi))\gamma = s\gamma.$$

Így $(\hat{e}\varphi)\gamma = (\hat{e}\mathcal{J}, 1)\chi \,\mathcal{R}\, s\gamma$. Ez azt jelenti, hogy az $\hat{e}\varphi$ és $e'\varphi$ idempotensek egy $\mathcal{J}$-osztályba esnek B-ben. Mivel B normális köteg, és $\hat{e}\varphi$-nek és $e'\varphi$-nek ugyanaz a bal szélső szorzótényezője (tudniillik $e'\varphi$), ezért $\hat{e}\varphi \,\mathcal{R}\, e'\varphi \,\mathcal{R}\, s$. Hasonlóképpen $({}^{a^{-1}}\hat{e})\varphi \,\mathcal{L}\, s$, ami az $(\hat{e}\mathcal{J}, a)\chi = s\gamma$ egyenlőséggel együtt az $(\hat{e}, a)\eta = s$ egyenlőséget adja. Tehát η szürjektív homomorfizmus, ezzel a tételt beláttuk.

■

Ezen lemma alapján elegendő egy megfelelő B köteget találni ahhoz, hogy S-ről belássuk, hogy gyengén fedhető.

4.9. Lemma. *Legyen $(B, X, \hat{\varphi})$ X-generált köteg valamely X halmazra, és jelölje E a $B/\mathcal{J}$ félhálót. Továbbá legyen G olyan csoport, amely hat X-en. Ekkor létezik olyan X-generált (B', X, δ) köteg a B által generált varietásban, valamint létezik olyan $\varphi\colon B' \to B$ X-homomorfizmus, amelyre*

(i) *a $\varphi\mathcal{J}_B^{\natural}\colon B' \to E$ homomorfizmus magja $\mathcal{J}_{B'}$, így $B'/\mathcal{J}_{B'}$ azonosítható E-vel úgy, hogy $e'\mathcal{J}_{B'} = (e'\varphi)\mathcal{J}_B$ minden $e' \in B'$ esetén,*

(ii) *a G csoport úgy hat a B' kötegen, hogy minden $x \in X$ és $a \in G$ esetén $({}^{a}x)\delta = {}^{a}(x\delta)$.*

Bizonyítás: Jelölje F_X az X által generált szabad köteget a B által generált varietásban. A $\hat{\varphi}$ leképezés indukál egy $\tilde{\varphi}\colon F_X \to B$ leképezést. Mivel B X-generált köteg, ezért $\tilde{\varphi}$ szürjektív. Világos, hogy G hatása X-en kiterjed F_X-re. Legyen $\nu\colon F_X \to E$, $w \mapsto (w\tilde{\varphi})\mathcal{J}_B$, valamint legyen

$$\hat{\theta} = \{(uvu, u) : u\nu = v\nu\} \subseteq F_X \times F_X.$$

Jelölje θ a $\hat{\theta}$ által generált kongruenciát és B' az F_X/θ köteget. Látható, hogy $\theta \subseteq \ker \nu$, amiből következik, hogy ν indukál egy $\iota\colon B' \to E$ homomorfizmust. Mivel E félháló, ezért $\mathcal{J}_{B'} \subseteq \ker \iota$. Továbbá, ha $(u\theta)\iota = (v\theta)\iota$, akkor $u\nu = v\nu$, vagyis $(uvu, u), (vuv, v) \in \theta$, amiből következik, hogy $u\theta \ \mathcal{J}_{B'} \ v\theta$. Ezért ι magja éppen $\mathcal{J}_{B'}$. Minthogy $(x\theta)\iota = (x\hat{\varphi})\mathcal{J}_B$ és $X\hat{\varphi}$ generálja B-t, ezért $(X\theta)\iota$ generálja E-t. Tehát ι szürjektív, és így azonosítja $B'/\mathcal{J}_{B'}$-t E-vel.

Definíció szerint $u\tilde{\varphi} \ \mathcal{J}_{B'} \ v\tilde{\varphi}$ pontosan akkor, ha $u\nu = v\nu$. Ebből következik, hogy $\theta \subseteq \ker \tilde{\varphi}$, és így $\tilde{\varphi}$ indukál egy $\varphi\colon B' \to B$ szürjektív homomorfizmust. Vegyük észre, hogy $\hat{\theta}$ G-invariáns, (vagyis ha $e \ \hat{\theta} \ f$, akkor ${}^a e \ \hat{\theta} \ {}^a f$), így θ is G-invariáns. Ez azt jelenti, hogy G hatása F_X-en csoporthatást indukál B'-n. Definiáljuk a $\delta\colon X \to B'$, $x \mapsto x\theta$ leképezést (itt feltesszük, hogy $X \subseteq F_X$). Világos, hogy a (B', X, δ) X-generált köteg, valamint a φ leképezés eleget tesz a lemma feltételeinek, ezzel a lemmát beláttuk.

■

A következő tétel mutatja, hogy általánosított inverz félcsoportok esetén a gyengén fedhető félcsoportok jól jellemezhetők legnagyobb inverz félcsoport homomorf képük segítségével.

4.10. Tétel. *Egy általánosított inverz félcsoport akkor és csak akkor gyengén fedhető, ha legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Bizonyítás: A csak akkor irányt már előzőleg beláttuk. A fordított irányhoz legyen S olyan általánosított inverz félcsoport a B köteggel, amelyre S/γ majdnem faktorizálható. Jelölje E a $B/\mathcal{J}$ félhálót. Mivel S/γ majdnem faktorizálható, ezért van olyan G csoport, amely hat E-n, valamint olyan $\chi\colon E{*}G \to S/\gamma$ szürjektív idempotens-szétválasztó homomorfizmus, amelyre $(\alpha, 1)\chi = \alpha$ minden $\alpha \in E$ esetén. Minden $\alpha \in E$ esetén jelölje J_α az α-hoz tartozó $\mathcal{J}_B$-osztályt. Legyen I olyan halmaz, amelyre $|I| > |J_\alpha|$ minden $\alpha \in E$ esetén, és legyen $X = \{x_i^\alpha : \alpha \in E, i \in I\}$, ahol $x_i^\alpha = x_j^\beta$ pontosan akkor, ha $i = j$ és $\alpha = \beta$. Minden $x_i^\alpha \in X$ esetén válasszunk ki, és rögzítsünk egy $(x_i^\alpha)\hat{\varphi} \in J_\alpha$ elemet úgy, hogy $\{(x_i^\alpha)\hat{\varphi} : i \in I\}$ generálja J_α-t minden $\alpha \in E$ esetén. Ezt meg tudjuk tenni, mert $|I| > |J_\alpha|$. Ily módon $(B, X, \hat{\varphi})$ X-generált köteg. Definiáljuk G hatását X-en a következő módon: ${}^a(x_i^\alpha) =$

$x_i^{{}^a\alpha}$. A 4.9. Lemma szerint ekkor létezik olyan (B', X, δ) X-generált köteg, valamint olyan $\varphi\colon B' \to B$ X-homomorfizmus, amelyre $\varphi\mathcal{J}_B^\natural$ magja $\mathcal{J}_{B'}$, valamint $({}^a x)\delta = {}^a(x\delta)$ bármely $a \in G$ és $x \in X$ esetén. Mivel $\delta\varphi = \hat{\varphi}$ és $X\hat{\varphi}$ generálja B-t, ezért φ szürjektív. Továbbá bármely $e' \in B'$ és $a \in G$ esetén $({}^a e')\mathcal{J}_{B'} = {}^a(e'\mathcal{J}_{B'})$. Ezért a

$$\pi_{\mathcal{J}}\colon B' * G \to E * G,\ (e', a)\pi_{\mathcal{J}} = (e'\mathcal{J}_{B'}, a)$$

leképezés szürjektív homomorfizmus, aminek magja $B' * G$ legkisebb inverz kongruenciája, vagyis $\pi_{\mathcal{J}}$ azonosítja $(B' * G)/\gamma$-t $E * G$-vel. Mivel $(x_i^\alpha\delta\varphi)\gamma = (x_i^\alpha\hat{\varphi})\gamma = (x_i^\alpha\delta)\pi_{\mathcal{J}}\chi$ minden $x_i^\alpha \in X$ esetén, ezért $(e\varphi)\gamma = (e\mathcal{J}, a)\chi$ minden $e \in B'$-re. Ebből következik, hogy a B' köteg, valamint a $\chi\colon E * G \to S/\gamma$ és $\varphi\colon B' \to B$ homomorfizmusok teljesítik a 4.8. Lemma feltételeit, ezért S gyengén fedhető.

■

A következő lemma a gyenge fedhetőség egy szükséges feltételét adja.

4.11. Lemma. *Ha S gyengén fedhető félcsoport a B köteggel, akkor minden $s \in S$ és $f \in B$ esetén létezik olyan $\tilde{f}, e \in B$, amelyre $f\ \mathcal{D}_S\ \tilde{f}$, $e\ \mathcal{L}\ s$ és $s'fs\ \mathcal{L}\ e\tilde{f}e$ minden $s' \in V(s)$-re.*

Bizonyítás: Minthogy S gyengén fedhető, létezik $\varphi\colon B' * G \to S$ szürjektív homomorfizmus. Legyen $e', f' \in B'$ és $a \in G$ úgy, hogy $(e', a)\varphi = s$ és $(f', 1)\varphi = f$. Jelölje $\tilde{f}$ az $({}^{a^{-1}}f', 1)\varphi$, valamint e az $({}^{a^{-1}}e', 1)\varphi$ idempotenseket. Legyen $\hat{s} = ({}^{a^{-1}}e', a^{-1})\varphi$. Ekkor $\hat{s} \in V(s)$ és

$$\hat{s}fs = ({}^{a^{-1}}e', a^{-1})\varphi \cdot (f', 1)\varphi \cdot (e', a)\varphi = ({}^{a^{-1}}e' \cdot {}^{a^{-1}}f' \cdot {}^{a^{-1}}e', 1)\varphi = e\tilde{f}e.$$

Az S félcsoport ortodox, ezért a 2.2. Tétel szerint $s'fs\ \mathcal{L}\ \hat{s}fs = e\tilde{f}e$ minden $s' \in V(s)$ esetén. Mivel $\tilde{f}\ \mathcal{D}_S\ f$, ezért a lemmát beláttuk.

■

Ezt a szükséges feltételt használva megadunk olyan ortodox félcsoportot, amely nem gyengén fedhető annak ellenére, hogy legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.

4.12. Állítás. *Létezik olyan ortodox félcsoport, amely nem gyengén fedhető, de legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Bizonyítás: Vegyük az

$$S = \{[i, i, i, i] : i \in \{1, 2, 3, 4\}\} \cup \{[1, 2, 1, 1], [4, 4, 3, 4], [3, 4, 3, 3], [2, 2, 1, 2]\}$$

transzformáció-félcsoportot az $\{1,2,3,4\}$ halmazon, ahol $[a,b,c,d]$ jelöli az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

transzformációt. Jelölje e a $[4,4,3,4]$, valamint f az $[1,2,1,1]$ idempotenst. Az S félcsoportnak két nem-idempotens eleme van, amelyek egymás inverzei, mégpedig $s=[2,2,1,2]$ és $s'=[3,4,3,3]$.

Tegyük fel, hogy S gyengén fedhető. Ekkor a 4.11. Lemmát az s és f elemekre alkalmazva kapjuk, hogy vannak olyan $\tilde{e},\tilde{f}\in S$ idempotensek, amelyekre $\tilde{f}\ \mathcal{D}_S\ f$, $\tilde{e}\ \mathcal{L}\ e$ és $\hat{s}fs\ \mathcal{L}\ \tilde{e}\tilde{f}\tilde{e}$ minden $\hat{s}\in V(s)$ esetén. Mivel f az egyedüli idempotens az s elem $\mathcal{L}$-osztályában, valamint s' az s egyedüli inverze, ezért $\tilde{e}=f$, így $s'fs=[2,2,2,2]\ \mathcal{L}\ f\tilde{f}f$. Vegyük észre, hogy $\tilde{f}$ csak e vagy f lehet. Ezek az elemek azonban nem teljesítik az előző feltételt, így S nem gyengén fedhető. S legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe az öt elemű Brandt-félcsoport, ami majdnem faktorizálható, hiszen előáll $\mathcal{I}_2\setminus U(\mathcal{I}_2)$ alakban, vagyis egy faktorizálható monoid egységcsoportját elhagyva megkapható. Ezzel az állítást beláttuk.

■

A 4.11. Lemma mutatja, hogy a csoporthatás nyomai megtalálhatók a gyengén fedhető ortodox félcsoportban, hiszen a benne szereplő $\tilde{f}$ idempotens éppen ${}^{a}f$ homomorf képe. Ezt az észrevételt fogjuk felhasználni annak érdekében, hogy a gyenge fedhetőség egy szükséges és elegendő feltételét kapjuk. Mielőtt ezt a feltételt megfogalmaznánk, szükségünk van a majdnem faktorizálható inverz félcsoportok egy tulajdonságára. A következő tétel a [La2]-ban található 2.5. Tétel átfogalmazása.

4.13. Lemma. [La2] *Legyen T majdnem faktorizálható inverz félcsoport, E pedig jelölje idempotenseinek félhálóját. Legyen G olyan csoport, amely hat az E' félhálón, valamint legyen $\varphi\colon E'*G\to T$ szürjektív homomorfizmus. Ekkor $\Sigma(T)$-nek létezik olyan G' részcsoportja, amely a ${}^{(\lambda,\rho)}e=\lambda e\rho^{-1}$ szabály szerint hat az E félhálón, valamint létezik olyan $\psi\colon G\to G'$ szürjektív homomorfizmus, amelyre minden $a\in G$ és $e\in E$ esetén ${}^{a}e={}^{a\psi}e$ és $(e,a)\varphi=(e\varphi,a\psi)\chi$, ahol $\chi\colon E*G'\to T$, $(e,(\lambda,\rho))\chi=e\rho$.*

Legyen S gyengén fedhető ortodox félcsoport, B az idempotenseinek kötege, valamint legyen $\eta\colon B'*G\to S$ szürjektív idempotens-szétválasztó homomorfizmus. Jelölje η megszorítását az idempotensekre φ. Definiáljuk a $\pi_{\mathcal{J}}\colon B'*G\to E'*G$, $(e,a)\mapsto(e\mathcal{J},a)$ homomorfizmust, ahol E' jelöli B' legnagyobb félháló homomorf képét. Amint azt a 4.7. Lemma bizonyítása előtt láttuk, η indukál egy $\chi'\colon E'*G\to S/\gamma$ homomorfizmust, amelyre $\eta\gamma^{\natural}=\pi_{\mathcal{J}}\chi'$. Ekkor az előző lemma szerint létezik olyan G' részcsoportja $\Sigma(S/\gamma)$-nak és olyan $\psi\colon G \to G'$ szürjektív homomorfizmus, hogy bármely $(\alpha, a) \in E' * G$ esetén $(\alpha, a)\chi' = (\alpha\chi', a\psi)\chi$.

Legyen a $\mathcal{G}$ irányított gráf csúcshalmaza $V(\mathcal{G}) = B$, valamint élhalmaza

$$E(\mathcal{G}) = \{(e'\varphi, a, ({}^{a}e')\varphi) : e' \in B', a \in G\},$$

ahol az $(e, a, f) \in E(\mathcal{G})$ él az e csúcsból az f csúcsba mutat, és a címkéje a. Mivel φ homomorfizmus és G hat B'-n, ezért $(e_1e_2, a, f_1f_2) \in E(\mathcal{G})$ ha $(e_1, a, f_1), (e_2, a, f_2) \in E(\mathcal{G})$. Legyen $(e, a, f), (e_1, a^{-1}, f_1) \in E(\mathcal{G})$. Ekkor létezik olyan $e', e_1' \in B'$, amelyre $e'\varphi = e$, $({}^{a}e')\varphi = f$, $e_1'\varphi = e_1$ és $({}^{a^{-1}}e_1')\varphi = f_1$. A 4.11. Lemma bizonyításához hasonlóan belátható, hogy az $s = (e', a^{-1})\eta$ elem kielégíti az alábbi feltételeket: $s \mathrel{\mathcal{R}} e$, $s \mathrel{\mathcal{L}} f$, $s\gamma = (e'\mathcal{J}, a^{-1})\chi' = (e\mathcal{J}, a^{-1}\psi)\chi$ és $se_1s' \mathrel{\mathcal{R}} ef_1e$ minden $s' \in V(s)$ esetén. Ezen észrevétel duálisa, hogy ha $(e, a, f), s$ és s' olyan, mint az előző állításban, valamint $(e_2, a, f_2) \in E(\mathcal{G})$, akkor $s'e_2s \mathrel{\mathcal{L}} ff_2f$.

Azt mondjuk, hogy a $\varphi'\colon G \to V(\mathcal{G})$ leképezés *pályaleképezés*, ha minden $a, b \in G$ esetén $(a\varphi', b, (ba)\varphi') \in E(\mathcal{G})$. Legyen $e \in V(\mathcal{G})$. Ekkor létezik olyan $e' \in B'$, amelyre $e'\varphi = e$. Definiáljuk a $\varphi'\colon G \to V(\mathcal{G})$ leképezést a következő módon: $a\varphi' = ({}^{a}e')\varphi$. A $\mathcal{G}$ gráf definíciója miatt $(a\varphi', b, (ba)\varphi') \in E(\mathcal{G})$ minden $a, b \in G$ esetén, vagyis φ' olyan pályaleképezés, amelyre $1\varphi' = e$. Mint a következő tétel mutatja, a $\mathcal{G}$ gráf felsorolt tulajdonságai elegendőek a gyenge fedhetőség eldöntésére.

4.14. Tétel. *Legyen S ortodox félcsoport, B pedig az idempotenseinek kötege. Jelölje a $B/\mathcal{J}$ félhálót E. Ekkor S pontosan akkor gyengén fedhető, ha létezik olyan G csoport, $\psi\colon G \to G'$ homomorfizmus G-ről $\Sigma(S/\gamma)$ egy részcsoportjára (amely biztosítja, hogy G hat E-n az ${}^{a}\alpha = {}^{a\psi}\alpha$ szabállyal), valamint egy $\mathcal{G}$ gráf B csúcs-, illetve $E(\mathcal{G}) \subseteq B \times G \times B$ élhalmazzal oly módon, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

(G1) *a $\chi\colon E * G' \to S/\gamma$, $(\alpha, (\lambda, \rho)) \mapsto \alpha\rho$ homomorfizmus szürjektív,*

(G2) *$f\mathcal{J} = {}^{a}(e\mathcal{J})$ minden $(e, a, f) \in V(\mathcal{G})$ esetén,*

(G3) *$(ee', a, ff') \in E(\mathcal{G})$ valahányszor $(e, a, f), (e', a, f') \in E(\mathcal{G})$,*

(G4) *minden $e \in V(\mathcal{G})$ esetén létezik olyan $\varphi_e\colon G \to V(\mathcal{G})$ pályaleképezés, melyre $1\varphi_e = e$,*

(G5) *minden $(e, a, f) \in E(\mathcal{G})$ esetén az*

$$s \mathrel{\mathcal{R}} e, \quad s \mathrel{\mathcal{L}} f \quad \text{és} \quad s\gamma = (e\mathcal{J}, a^{-1}\psi)\chi$$

relációk által meghatározott s elem kielégíti az

$$se_1s' \,\mathcal{R}\, ef_1e \quad \textit{és} \quad s'e_2s \,\mathcal{L}\, ff_2f$$

feltételeket bármely $(e_2, a, f_2), (e_1, a^{-1}, f_1) \in E(\mathcal{G})$ és $s' \in V(s)$ esetén.

Bizonyítás: A feltételek szükségességét a tétel előtt már beláttuk. Az elegendőséghez legyen G olyan csoport, $\psi\colon G \to G'$ olyan szürjektív homomorfizmus $\Sigma(S/\gamma)$ egy részcsoportjára, és legyen $\mathcal{G}$ olyan gráf, amelyek kielégítik a lemma feltételeit. A következő lemma visszavezeti S gyenge fedhetőségét bizonyos tulajdonságú B' köteg és $\varphi\colon B' \to B$ homomorfizmus létezésére.

4.15. Lemma. *Tegyük fel, hogy B' olyan köteg, amely az alábbi feltételeket teljesíti:*

(i) *$B'/\mathcal{J} = E$,*

(ii) *a G csoport úgy hat B'-n, hogy minden $e' \in B'$ és $a \in G$ esetén $({}^a e')\mathcal{J} = {}^a(e'\mathcal{J})$,*

(iii) *létezik olyan $\varphi\colon B' \to B$ szürjektív homomorfizmus, melyre $(e'\varphi)\mathcal{J} = e'\mathcal{J}$ minden $e' \in B'$ esetén.*

Ekkor az $\eta\colon B' * G$, $(e', a) \mapsto s$ leképezés jól definiált, ahol $s \,\mathcal{R}\, e'\varphi$, $s \,\mathcal{L}\, ({}^{a^{-1}}e')\varphi$ és $s\gamma = (e', a)\pi_{\mathcal{J}}\chi$. Továbbá ha a következő feltétel is teljesül, akkor η szürjektív homomorfizmus:

(iv) *minden $(e', a) \in B' * G$ esetén, az $s = (e', a)\eta$ elem kielégíti az $s(f'\varphi)s' \,\mathcal{R}\, (e'({}^a f')e')\varphi$ és $s'(f'\varphi)s \,\mathcal{L}\, ({}^{a^{-1}}(e'f'e'))\varphi$ feltételeket minden $s' \in V(s)$-re és $f' \in B'$-re.*

Bizonyítás: A (ii) és (iii) feltételekből nyilvánvaló módon következik, hogy η jól definiált. Tegyük fel, hogy a (iv) feltétel is teljesül. Belátjuk, hogy ekkor η homomorfizmus. Legyen $(e', a), (f', b) \in B' * G$ úgy, hogy $(e', a)\eta = s$ és $(f', b)\eta = t$. Meg kell mutatnunk, hogy $(e' \cdot {}^a f', ab)\eta = st$. Először is,

$$(e' \cdot {}^a f', ab)\gamma = ((e' \cdot {}^a f')\mathcal{J}, ab)\chi = (e'\mathcal{J}, a)\chi \cdot (f'\mathcal{J}, b)\chi = s\gamma \cdot t\gamma = (st)\gamma.$$

Jelölje S legnagyobb idempotens-szétválasztó kongruenciáját μ. Mivel $\gamma \cap \mu$ az egyenlőségreláció S-en, az $(e' \cdot {}^a f', ab)\eta = st$ egyenlőség bizonyításához elegendő azt belátnunk, hogy $(e' \cdot {}^a f', ab)\mu = (st)\mu$. Ehhez legyen $\hat{e} \in B'$. Ekkor a (iv) feltétel szerint bármely $s' \in V(s)$ és $t' \in V(t)$ esetén

$$st \cdot \hat{e}\varphi \cdot t's' \,\mathcal{R}\, s(t \cdot \hat{e}\varphi \cdot t')s' \,\mathcal{R}\, s((f' \cdot {}^b\hat{e} \cdot f')\varphi)s' \,\mathcal{R}$$

$$(e'\,{}^a f' \cdot {}^{ab}\hat{e} \cdot {}^a f' e')\varphi \,\mathcal{R}\, (e'\,{}^a f' \cdot {}^{ab}\hat{e} \cdot e'\,{}^a f')\varphi.$$

Itt kihasználtuk, hogy bármely kötegre és annak bármely e, f, x elemére $efxef \mathcal{R} efxfe$. Vagyis az st elem φ szürjektivitása miatt ugyanúgy konjugálja B $\mathcal{R}$-osztályait, mint $(e' \cdot {}^a f', ab)\eta$. Hasonlóképpen belátható, hogy az $\mathcal{L}$-osztályokat is ugyanúgy konjugálja. Ezért a 2.2. Tétel szerint $(st)\mu = ((e' \cdot {}^a f', ab)\eta)\mu$, így η tényleg homomorfizmus. Most belátjuk, hogy szürjektív. Legyen $s, s' \in S$, ahol $s' \in V(s)$. Mivel χ szürjektív a (G1) tulajdonság szerint, ezért $s\gamma = (\alpha, a)\chi$ valamely $(\alpha, a) \in E * G$-re. Ekkor $(ss')\mathcal{J} = \alpha$ és $(s's)\mathcal{J} = {}^{a^{-1}}\alpha$. Vegyük észre, hogy az (i) és (iii) feltételek szerint φ szürjektív a $\mathcal{J}$-osztályokon, vagyis bármely $\beta \in E$ esetén szürjektíven képezi le a B' köteg J'_β osztályát a B köteg J_β osztályára. Eszerint létezik $e', f' \in B'$ úgy, hogy $e'\mathcal{J} = \alpha$, $f'\mathcal{J} = {}^{a^{-1}}\alpha$, $e'\varphi = ss'$ és $f'\varphi = s's$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $(e' \cdot {}^a f', a)\eta = s$, ezzel a lemmát beláttuk.

■

A 4.14. Tétel bizonyításához már csak egy megfelelő B' köteget kell találnunk.

Minden $e \in V(\mathcal{G})$ csúcsra legyen $X_e = \{x_a^e : a \in G\}$, ahol $x_a^e = x_b^f$ pontosan akkor, ha $e = f$ és $a = b$. Legyen

$$X = \bigcup_{e \in V(\mathcal{G})} X_e.$$

Minden $b \in G$ és $x_a^e \in X$ esetén legyen ${}^b(x_a^e) = x_{ba}^e$. Látható, hogy így G egy hatását definiáltuk X-en. Minden $e \in V(\mathcal{G})$ esetén válasszunk ki és rögzítsünk egy olyan φ_e pályaleképezést, amilyen a (G4) feltételben szerepel. Definiáljuk a $\hat{\varphi}\colon X \to B$, $x_a^e \mapsto a\varphi_e$ leképezést. Mivel $x_1^e\hat{\varphi} = e$, ezért $X\hat{\varphi}$ generálja B-t, vagyis $(B, X, \hat{\varphi})$ X-generált köteg. Ekkor a 4.9. Lemma szerint létezik olyan (B', X, δ) X-generált köteg és olyan $\varphi\colon B' \to B$ X-homomorfizmus, amelyekre $e'\mathcal{J} = (e'\varphi)\mathcal{J}$ minden $e' \in B'$. Továbbá a G csoport úgy hat a B' kötegen, hogy $({}^a x)\delta = {}^a(x\delta)$ minden $x \in X$ és $a \in G$ esetén.

Definíció szerint $((x_{a'}^e)\hat{\varphi}, b, (x_{ba'}^e)\hat{\varphi}) \in E(\mathcal{G})$, vagyis $((x_{a'}^e\delta)\varphi, b, (x_{ba'}^e\delta)\varphi) \in E(\mathcal{G})$. Mivel φ homomorfizmus, a (G3)-as tulajdonság szerint bármely $e', f' \in B$ és $b \in G$ esetén ha

$$(e'\varphi, b, ({}^b e')\varphi), (f'\varphi, b, ({}^b f')\varphi) \in E(\mathcal{G}),$$

akkor

$$((e'f')\varphi, b, ({}^b(e'f'))\varphi) \in E(\mathcal{G}).$$

Mivel $X\delta$ generálja B'-t, ezért ez a két észrevétel azt mutatja, hogy bármely $e' \in B'$ és $b \in G$ esetén $(e'\varphi, b, ({}^b e')\varphi) \in E(\mathcal{G})$.

Legyen $\hat{e} \in B'$ és $(e', a) \in B' * G$. Definiáljuk az η leképezést úgy, mint a 4.7. Lemmában, és jelölje s az $(e', a)\eta$ elemet. Definíció szerint

$s\ \mathcal{R}\ e'\varphi$, $s\ \mathcal{L}\ ({}^{a^{-1}}e')\varphi$ és $s\gamma = (e'\mathcal{J}, a)\chi$. Mivel $(\hat{e}\varphi, a, ({}^{a}\hat{e})\varphi) \in E(\mathcal{G})$ és $(e'\varphi, a^{-1}, ({}^{a^{-1}}e')\varphi) \in E(\mathcal{G})$, ezért a (G5)-ös tulajdonság szerint $s \cdot \hat{e}\varphi \cdot s'\ \mathcal{R}\ e'\varphi \cdot ({}^{a}\hat{e})\varphi \cdot e'\varphi$ és hasonlóképpen $s' \cdot \hat{e}\varphi \cdot s\ \mathcal{L}\ ({}^{a^{-1}}(e'\hat{e}e'))\varphi$ minden $s' \in V(s)$ esetén. Vagyis a φ leképezés kielégíti a 4.15. Lemma (iv) feltételét, így η szürjektív homomorfizmus. Ezzel a tételt beláttuk.

■

A 4.13. Lemma mutatja, hogy majdnem faktorizálható inverz félcsoportok esetén a szemidirekt szorzat fedő csoport tényezőjét elegendő a $\Sigma(S)$ csoport részcsoportjai között keresni. [Ha2]-ben az előző tétel alkalmazásaként megmutattuk, hogy gyengén fedhető ortodox félcsoportok esetén még a $\Sigma(S/\gamma)$ által generált varietás sem elegendő. Így a szemidirekt szorzat csoport tényezőjét látszólag semmi sem korlátozza, ami a következő kérdést érdekessé teszi.

4.16. Probléma. *Eldönthető-e egy adott véges ortodox félcsoport gyenge fedhetősége?*

5. Ortodox félcsoportok beágyazása

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy minden ortodox félcsoport beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba. Mivel a 2.6. Tétel alapján ez inverz félcsoportokra igaz, ezért a továbbiakban csak nem-inverz félcsoportokkal foglalkozunk.

Először definiáljuk gráf-félcsoportok kanonikus homomorfizmusát, amely [Sze3]-ban szerepel. Legyen $T = S(\mathcal{G}, \delta)$ gráf-félcsoport, ahol $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, X, \chi)$ valamely (G, X, χ) X-generált csoportra. Jelölje $\mathbf{V}$ az $E(S)$ által generált varietást, valamint τ az $A(\mathcal{G})^{\oplus}$ szabad félcsoportnak a $\delta \cup \rho_{\mathbf{V}}(A(\mathcal{G}))$ reláció által generált kongruenciáját. Legyen továbbá $\mathcal{B} = A(\mathcal{G})^{\oplus}/\tau$. Ellenőrizhető, hogy τ G-invariáns, ezért G hatása $A(\mathcal{G})^{\oplus}$-on meghatározza G egy hatását az $A(\mathcal{G})^{\oplus}/\tau$ kötegen. Tehát definiálható a $\mathcal{B} * G$ szemidirekt szorzat. Ekkor a $\varphi\colon T \to \mathcal{B} * G$, $p\delta \mapsto (p\tau, \omega(p))$ leképezés homomorfizmus. Ezt a homomorfizmust T *kanonikus homomorfizmusának* nevezzük. Az alábbi tétel mutatja a kanonikus homomorfizmus jelentőségét.

5.1. Tétel. [Sze2] *Egy E-unitér reguláris félcsoport akkor és csak akkor közelre beágyazható, ha kanonikus homomorfizmusa injektív.*

Most a kanonikus homomorfizmus segítségével belátjuk, hogy a biszabad ortodox félcsoportok idempotenstiszta homomorf képeinek idempotensszétválasztó kongruenciái kiterjeszthetők egy alkalmas szemidirekt szorzat idempotens-szétválasztó kongruenciájává. A fent említett félcsoportok szabad csoportokból származó gráf-félcsoportokként konstruálhatók meg. Legyen (G, X, χ) egy X-generált szabad csoport, δ pedig olyan G-kongruenciája a $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, X, \chi)$ gráfnak, amely tartalmazza a $\beta_{\mathbf{B}}(A(\mathcal{G}))$ kongruenciát. Jelölje T az $S(\mathcal{G}, \delta)$ gráf-félcsoportot. Mivel G szabad csoport, ezért $\mathcal{G}$ fa. Jelölje $r(a, b)$ az a és b csúcsot összekötő utat a $\mathcal{G}$ fában. Legyen $u \in A(\mathcal{G}^{\oplus})$. Az u szó betűi a $\overline{\mathcal{G}}$ gráf élei, ezért beszélhetünk u maximális részsétáiról. Jelölje p_i az u szó i-edik maximális részsétáját, így $u = p_1 p_2 \ldots p_k$. Jelölje a

$$p_1 r(\omega(p_1), \alpha(p_2)) p_2 \ldots r(\omega(p_{k-1}), \alpha(p_k)) p_k$$

sétát p. Tetszőleges $a, b \in G$ esetén legyen $\tilde{u}[a, b] = \{q \in \mathcal{G}^{\oplus}(a, b) : q \; \rho_{\mathbf{V}} \; p\}$. Legyen továbbá $\tilde{u} = \bigcup_{a,b \in G} \tilde{u}[a, b]$. Ekkor $\tilde{u}$ elemeit az u szó *kiterjesztéseinek* nevezzük. A kiterjesztés fogalmát [Sze3]-ban definiálta M. B. Szendrei, azonban más formában. Mivel nekünk elsősorban a kiterjesztés tulajdonságaira van szükségünk, ezért ezt az egyszerűbb definícióját alkalmazzuk. Az említett tulajdonságokat az alábbi lemma sorolja fel.

5.2. Lemma. [Sze3] *Legyen $u, v \in A(\mathcal{G})^{\oplus}$. Ekkor*

(i) *Ha p (a, b)-séta, akkor $p \in \tilde{p}[a, b]$.*

(ii) *Ha $a = \alpha(u)$ és $b = \omega(u)$, akkor az $\tilde{u}[a, b]$ halmaz nemüres.*

(iii) *Ha $p \in \tilde{u}[a, b]$ és $q \in \tilde{v}[c, d]$, akkor $pr(b, c)q \in \widetilde{uv}[a, d]$.*

(iv) *Ha $u \; \rho_{\mathbf{V}} \; v$, akkor $\tilde{u}[a, b] = \tilde{v}[a, b]$.*

(v) *Ha $p \in \tilde{u}[a, b]$ és $q \in \tilde{w}[c, d]$, akkor $p \; \rho_{\mathbf{V}} \; q$.*

Az előző lemma eredményeit felhasználva adódik a következő.

5.3. Lemma. [Sze3] *Ha $u \; \tau \; v$, $p \in \tilde{u}[a, b]$ és $q \in \tilde{v}[c, d]$, akkor $p \; \delta \; q$.*

Ezen lemma segítségével bizonyítható a 2.16. Tétel, ami alapján azonosíthatjuk a T gráf-félcsoportot a $\mathcal{B} * G$ szemidirekt szorzat $\{(p\tau, a) : p \in \mathcal{G}^{\oplus}(1, a)\}$ részfélcsoportjával. Legyen most α egy idempotens-szétválasztó kongruenciája T-nek, és jelölje a $\mathcal{B} * G$ félcsoport α által generált kongruenciáját $\alpha^{\sharp}$. A bizonyítások egyszerűsítése érdekében a $\mathcal{B} * G$ félcsoport helyett az $A(\mathcal{G})^{\oplus} * G$ félcsoportban végezzük a számításokat. Ehhez szükségünk van az alábbi fogalomra. Azt mondjuk, hogy az $((u, a), (v, b))$ pár elemi szóátalakítás, ha

(SZ1) $a = b$ és $u \; \tau \; v$, vagy

(SZ2) létezik olyan $p \in \mathcal{G}^{\oplus}(1,a)$, $q \in \mathcal{G}^{\oplus}(1,b)$ valamint $(u_1,a_1),(u_2,a_2) \in (A(\mathcal{G})^{\oplus} * G)^1$, amelyekre $(p\tau,b)\ \alpha\ (q\tau,c)$ és

$$\begin{aligned}(u,a) &= (u_1,a_1)(p,b)(u_2,a_2),\\ (v,b) &= (u_1,a_1)(q,c)(u_2,a_2).\end{aligned}$$

Az $(u_1,a_1),\ldots,(u_n,a_n)$ sorozatot $(u,a)\to(v,b)$ *szóátalakításnak* hívjuk, ha $(u_1,a_1)=(u,a)$, $(u_n,a_n)=(v,b)$ és $((u_i,a_i),(u_{i+1},a_{i+1}))$ elemi szóátalakítás bármely $1\le i<n$ esetén . Könnyen ellenőrizhető, hogy $(u\tau,a)\ \alpha^{\sharp}\ (v\tau,b)$ akkor és csak akkor, ha létezik $(u,a)\to(v,b)$ szóátalakítás.

5.4. Lemma. *Legyen $((u,a),(v,b))$ elemi szóátalakítás, ahol $\alpha(u)=\alpha(v)=1$, $\omega(u)=a$ és $\omega(v)=b$. Legyen továbbá $P\in\tilde{u}[1,a]$. Ekkor létezik olyan $Q\in\tilde{v}[1,b]$, amelyre $(P\tau,a)\ \alpha\ (Q\tau,b)$.*

Bizonyítás: Két eset lehetséges. Az első eset az, amikor az elemi szóátalakítás (SZ1) típusú, ekkor $a=b$ és $u\ \tau\ v$. Ebben az esetben legyen $Q\in\tilde{v}[1,a]$ tetszőleges. A 5.3. Lemma miatt ekkor $P\ \tau\ Q$, vagyis $(P\tau,a)\ \alpha\ (Q\tau,b)$.

A második eset az, amikor

$$\begin{aligned}(u,a) &= (u_1,a_1)(p,b)(u_2,a_2)\\ (v,b) &= (u_1,a_1)(q,c)(u_2,a_2),\end{aligned}$$

ahol $(p\tau,b)\ \alpha\ (q\tau,c)$. (Itt (u_1,a_1), illetve (u_2,a_2) hiányozhat. A továbbiakban a bizonyítások egyszerűsítésének érdekében "$(u_1,a_1)=1$"-et írunk, ha (u_1,a_1) hiányzik, annak ellenére, hogy az $A(\mathcal{G})^{\oplus} * G$ félcsoport nem feltétlenül monoid.) Feltehető, hogy $(u_1,a_1)\neq 1$ és $(u_2,a_2)\neq 1$, mivel a többi eset hasonlóképpen kezelhető. Mivel $\alpha(u)=1$, ezért $\alpha(u_1)=1$. Hasonlóképpen $\omega(u_2)=a_2$. Legyen $\hat{u_1}\in\tilde{u_1}[1,\omega(u_1)]$ és $\hat{u_2}\in\tilde{u_2}[\alpha(u_2),a_2]$. Ekkor

$$\hat{u_1}r(\omega(u_1),a_1)\cdot{}^{a_1}p\cdot r(a_1b,a_1b\alpha(u_2))\,{}^{a_1b}\hat{u_2}\in\tilde{u}[1,a].$$

Ezen reláció bal oldala a 5.3. Lemma szerint $\rho_{\mathbf{V}}$ relációban áll P-vel, vagyis τ relációban is. Ezért

$$(P\tau,a)=(\hat{u_1}r(\omega(u_1),a_1),a_1)\cdot(p\tau,b)\cdot(r(1,\alpha(u_2))\hat{u_2},a_2).$$

Legyen

$$Q=\hat{u_1}r(\omega(u_1),a_1)\cdot{}^{a_1}q\cdot r(a_1c,a_1c\alpha(u_2))\,{}^{a_1c}\hat{u_2}.$$

Mivel

$$v=u_1\cdot{}^{a_1}q\cdot{}^{a_1c}u_2,$$

ezért $Q \in \tilde{v}[1,b]$ és P, illetve Q definíciója szerint $(P\tau, a)\ \alpha\ (Q\tau, b)$.

■

Ismert, hogy ha $\mathbf{RB} \subseteq \mathbf{V}$, akkor az egymással $\rho_{\mathbf{V}}$ relációban lévő szavak első, illetve utolsó betűje megegyezik. Ha viszont $\mathbf{V} = \mathbf{RR}, \mathbf{RN}$ vagy $\mathbf{RZ}$, akkor az egymással $\rho_{\mathbf{V}}$ relációban lévő szavaknak csak az utolsó betűje egyezik meg, az első már lehet különböző. Ezeket az észrevételeket felhasználva bizonyítjuk az alábbi lemmát.

5.5. Lemma. *Legyen $(p\tau, a), (q\tau, b) \in T$ úgy, hogy $(p\tau, a)\ \alpha^\sharp\ (q\tau, b)$. Ekkor $(p\tau, a)\ \alpha\ (q\tau, b)$. Következésképpen α kiterjeszthető $\mathcal{B} * G$-re.*

Bizonyítás: Mivel $(p\tau, a)\ \alpha^\sharp\ (q\tau, b)$, ezért létezik $(p, a) \to (q, b)$ szóátalakítás. Legyen ez a $(p, a) = (u_1, a_1), \ldots, (u_n, a_n) = (q, b)$ sorozat. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{RB} \subseteq \mathbf{V}$. Ekkor $A(\mathcal{G})^\oplus$ egymással τ relációban lévő elemeinek ugyanaz a kezdő-, illetve végcsúcsa. Ezért $\alpha(u_i) = 1$ és $\omega(u_i) = a_i$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Legyen $p_1 = p$. Ekkor $(u_1, a_1) \to (u_2, a_2)$ elemi szóátalakítás, valamint $p_1 \in \tilde{u_1}[1, a_1]$ (mert $p_1 = p = u_1$). Ezért az előző lemma szerint van olyan $p_2 \in \tilde{u_2}[1, a_2]$, amelyre $(p_1\tau, a_1)\ \alpha\ (p_2\tau, a_2)$. Indukciót alkalmazva adódik, hogy minden $1 < i \leq n$ esetén létezik olyan $p_i \in \tilde{u_i}[1, a_1]$, amelyre $(p_{i-1}\tau, a_{i-1})\ \alpha\ (p_i\tau, a_i)$. Ebből következik, hogy $(p\tau, a) = (p_1\tau, a_1)\ \alpha\ (p_n\tau, a_n)$. Azonban $u_n = q$ és $q, p_n \in \tilde{u_n}[1, a_n]$ miatt $p_n\ \rho_{\mathbf{V}}\ q$, vagyis $(q\tau, b) = (p_n\tau, a_n)$. Ezzel az $\mathbf{RB} \subseteq \mathbf{V}$ esetben a lemmát beláttuk.

Ha $\mathbf{RB} \nsubseteq \mathbf{V}$, akkor vagy $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{RR}$, vagy $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{LR}$. Mivel a két eset teljesen hasonló, mi csak a $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{RR}$ esettel foglalkozunk. Minthogy T nem inverz félcsoport, és $\mathbf{LR} \cap \mathbf{RR} = \mathbf{Sl}$, így szükségképpen $\mathbf{V} \nsubseteq \mathbf{LR}$, ezért $\mathbf{RZ} \subseteq \mathbf{V}$. Ezért az $A(\mathcal{G})^\oplus$ félcsoportnak $\rho_{\mathbf{V}}$ relációban lévő elemei szükségképpen ugyanazon végcsúccsal rendelkeznek. Vegyük észre, hogy az (SZ2) típusú elemi szóátalakítások megváltoztathatják a végcsúcsot, azonban az $\omega(u_i) = a_i$ tulajdonság megőrződik. Legyen p' a p séta inverze, és tekintsük a $(pp'p, a) = (pp'u_1, a_1), (pp'u_2, a_2), \ldots, (pp'u_n, a_n) = (pp'q, b)$ sorozatot. Ekkor ez a sorozat is elemi szóátalakításokból áll, és a benne szereplő elemi szóátalakítások kielégítik az 5.4. Lemma feltételeit, ezért az előző esethez hasonlóan $(p\tau, a)\ \alpha\ ((pp'q)\tau, b)$ adódik. Hasonlóképpen $(q\tau, b)\ \alpha\ ((qq'p)\tau, a)$. Ekkor

$$(q\tau, b)\ \alpha\ ((qq'pp'p)\tau, a) = ((pp'qq'p)\tau, a)\ \alpha\ ((pp'q)\tau, b)\ \alpha\ (p\tau, a),$$

ezért $(p\tau, a)\ \alpha\ (q\tau, b)$, és így a lemmát beláttuk.

■

Legyen most S ortodox félcsoport, $T = S(\mathcal{G}, \delta)$ pedig olyan E-unitér fedője, amely egy biszabad ortodox félcsoport idempotenstiszta homomorf képe.

Más szóval, T-n adott egy α idempotens-szétválasztó kongruencia, amelyre $T/\alpha \cong S$. Legyen $G = T/\sigma$, és jelölje a $\mathcal{B} * G$ szemidirekt szorzat α által generált kongruenciáját $\alpha^\sharp$. Ekkor az előző lemma mutatja, hogy $\alpha^\sharp$ az α kiterjesztése. Azonban $\alpha^\sharp$ nem szükségképpen idempotens-szétválasztó kongruenciája $\mathcal{B} * G$-nek, ezért T-t egy másik szemidirekt szorzatba kell beágyaznunk. Ehhez jelölje β az $\alpha^\sharp$ megszorítását a $\mathcal{B}$ kötegre, $\beta^\sharp$ a β által $\mathcal{B} * G$-ben generált kongruenciát, valamint B a $\mathcal{B}/\beta$ köteget. Először belátjuk, hogy β G-invariáns, vagyis G hatása a $\mathcal{B}$ kötegen meghatározza G egy hatását a B kötegen.

5.6. Lemma. *Legyen $((u\tau, a), (v\tau, b))$ elemi átalakítás, és legyen $c \in G$. Ekkor $(({}^c u\tau, cac^{-1}), ({}^c v\tau, cbc^{-1}))$ is elemi átalakítás.*

Bizonyítás: Mivel $((u\tau, a), (v\tau, b))$ elemi átalakítás, ezért

$$(u\tau, a) = (u_1\tau, a_1)(p\tau, d)(u_2\tau, a_2)$$
$$(v\tau, b) = (u_1\tau, a_1)(q\tau, e)(u_2\tau, a_2),$$

ahol $(p\tau, d)\ \alpha\ (q\tau, e)$. Ha $(u_2\tau, a_2) \neq 1$, akkor legyen $y\tau = {}^{a_2^{-1}}(u_2' u_2)\tau$, ahol $u_2'\tau$ az $u_2\tau$ inverze. Ha pedig $(u_2\tau, a_2) = 1$, akkor legyen $y\tau = {}^{d^{-1}}(p'p)\tau$, ahol $p'\tau$ a $p\tau$ inverze. Definiáljuk duálisan az $x\tau$ elemet. Vegyük észre, hogy α idempotens-szétválasztó, ezért $(p\tau, d)\ \mathcal{L}\ (q\tau, e)$, amiből következik, hogy ${}^{d^{-1}}p\tau\ \mathcal{L}\ {}^{e^{-1}}q\tau$, és így

$$(q\tau, e)(y\tau, c^{-1}) = ((q \cdot {}^e y)\tau, ec^{-1}) = (q\tau, cec^{-1}).$$

Így $x\tau$ és $y\tau$ választása miatt

$$({}^c x\tau, c)(u\tau, a)(y\tau, c^{-1}) = ({}^c u\tau, cac^{-1})$$

és

$$({}^c x\tau, c)(v\tau, b)(y\tau, c^{-1}) = ({}^c v\tau, cbc^{-1}).$$

Ebben az esetben a

$$({}^c u\tau, cac^{-1}) = ({}^c x\tau, c)(u_1\tau, a_1)(p\tau, d)(u_2\tau, a_2)(y\tau, c^{-1}),$$
$$({}^c v\tau, cbc^{-1}) = ({}^c x\tau, c)(u_1\tau, a_1)(q\tau, e)(u_2\tau, a_2)(y\tau, c^{-1})$$

felbontások mutatják, hogy $(({}^c u\tau, cac^{-1}), ({}^c v\tau, cbc^{-1}))$ is elemi átalakítás. ■

Az előző lemma következményeként a β kongruencia G-invariáns.

5.7. Lemma. *Legyen $(u\tau, 1)\ \beta\ (v\tau, 1)$ és $c \in G$. Ekkor $({}^c u\tau, 1)\ \beta\ ({}^c v\tau, 1)$.*

Bizonyítás: Legyen $(u\tau, 1)\ \beta\ (v\tau, 1)$. Ekkor létezik egy

$$(u_1\tau, a_1), \ldots, (u_n\tau, a_n)$$

$(u\tau, 1) \to (v\tau, 1)$ átalakítás. Így az előző lemma miatt a

$$({}^{c}u\tau, 1) = ({}^{c}u_1\tau, ca_1c^{-1}), \ldots, ({}^{c}u_n\tau ca_nc^{-1}) = ({}^{c}v\tau, 1)$$

sorozat $(u\tau, 1) \to (v\tau, 1)$ átalakítás. Tehát $(u\tau, 1)\ \beta\ (v\tau, 1)$, és ezzel a lemmát beláttuk.

■

Beláttuk, hogy G hatása $\mathcal{B}$-n indukál egy csoporthatást B-n, így a $B * G$ szemidirekt szorzat adott. Legyen most $(u\tau, 1)\ \beta\ (v\tau, 1)$. Ekkor

$$(u\tau, a) = (u\tau, 1)(u\tau, a)\ \hat{\beta}\ (v\tau, 1)(u\tau, a) = ((vu)\tau, a).$$

Hasonlóképpen $({}^{a^{-1}}u\tau, 1)\ \beta\ ({}^{a^{-1}}v\tau, 1)$, amiből következik, hogy

$$((vu)\tau, a) = (v\tau, a)({}^{a^{-1}}u\tau, 1)\ \hat{\beta}\ (v\tau, a)({}^{a^{-1}}v\tau, 1) = (v\tau, a).$$

Ezért $(u\tau, a)\ \hat{\beta}\ (v\tau, a)$ minden $a \in G$ és $(u\tau, 1)\ \beta\ (v\tau, 1)$ esetén. Könnyen látható, hogy valójában

$$\hat{\beta} = \{((u\tau, a), (v\tau, b)) : a \in G \text{ és } (u\tau, 1)\ \beta\ (v\tau, 1)\},$$

valamint hogy $(\mathcal{B} * G)/\hat{\beta} \cong B * G$.

A következő lépés annak bizonyítása, hogy $\hat{\beta}$ nem ejt össze T-beli elemeket, vagyis T természetes módon beágyazható $B * G$-be is.

5.8. Lemma. *Ha $(p\tau, a), (q\tau, b) \in T$ olyan, hogy $(p\tau, a)\ \hat{\beta}\ (q\tau, b)$, akkor $(p\tau, a) = (q\tau, b)$.*

Bizonyítás: Az előző észrevételünk miatt szükségképpen $a = b$. Mivel $\hat{\beta} \subseteq \alpha^\sharp$, és $\alpha^\sharp$ kiterjesztése α-nak, ezért $(p\tau, a)\ \alpha\ (q\tau, a)$. Ugyanakkor α idempotens-szétválasztó, ezért $(p\tau, a)\ \mathcal{H}\ (q\tau, a)$, vagyis $(p\tau, 1)\ \mathcal{R}\ (q\tau, 1)$ és $({}^{a^{-1}}p\tau, 1)\ \mathcal{L}\ ({}^{a^{-1}}q\tau, 1)$. Mivel az $\mathcal{L}$ kongruencia $E(B * G)$-n G-invariáns, ezért $(p\tau, 1)\ \mathcal{L}\ (q\tau, 1)$. Ebből következik, hogy $(p\tau, 1) = (q\tau, 1)$, és ezzel a lemmát beláttuk.

■

Összefoglalva, a $\mathcal{B} * G$ szemidirekt szorzaton adott egy $\beta^\sharp$ kongruencia úgy, hogy $\beta^\sharp \subseteq \alpha^\sharp$, $(\mathcal{B} * G)/\beta^\sharp \cong B * G$, $\alpha^\sharp$ megszorítása $\mathcal{B}$-re megegyezik $\beta^\sharp$ megszorításával (mindkettő β), valamint $\beta^\sharp$ szeparálja T elemeit. Ez azt jelenti, hogy T beágyazható a $B * G$ szemidirekt szorzatba úgy, hogy a

$B * G$ félcsoportnak az α reláció által generált kongruenciája idempotens-szétválasztó kiterjesztése α-nak. Jelölje ezt a kongruenciát $\hat{\alpha}$, a $(B * G)/\hat{\alpha}$ majdnem faktorizálható ortodox félcsoportot pedig F. Mivel $\hat{\alpha}$ kiterjesztése α-nak, ezért T beágyazása $B * G$-be meghatározza $S = T/\alpha$ beágyazását $(B * G)/\hat{\alpha}$-ba. Ezzel a fejezet fő eredményét beláttuk.

5.9. Tétel. *Bármely ortodox félcsoport beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba.*

Ha S ortodox félcsoport, $\iota\colon S \to F$ beágyazása egy majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba, valamint $\varphi\colon B * G \to F$ idempotens-szétválasztó szürjektív homomorfizmus valamely $B * G$ szemidirekt szorzatról F-re, akkor az $\{(e, a) \in B * G : (e, a)\varphi \in S\iota\}$ félcsoport beágyazható E-unitér fedője S-nek. Azt mondjuk, hogy az S ortdox félcsoport T E-unitér fedője *megkapható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból*, ha izomorf egy ilyen E-unitér fedővel. Vegyük észre, hogy a bizonyítás során lényegében azt láttuk be, hogy a 2.16. Tételben szereplő beágyazható E-unitér fedők megkaphatók majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásokból. Az inverz félcsoportokra vonatkozó 2.8. Tétel ismeretében természetes az alábbi problémafelvetés.

5.10. Probléma. *Igaz-e, hogy ortodox félcsoportok bármely beágyazható E-unitér fedője megkapható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból?*

A 2.15. Tétel alapján a reguláris köteggel rendelkező E-unitér ortodox félcsoportok közelre beágyazhatók. A szerző alábbi tétele mutatja, hogy az inverz félcsoportokhoz hasonlóan a fenti tétel erősíthető.

5.11. Tétel. [Ha3]. *Bármely reguláris köteggel rendelkező ortodox félcsoport E-unitér fedői megkaphatók majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból.*

Hivatkozások

[Bi] Bernd Billhardt, *On embeddability into a semidirect product of a band by a group*, Journal of Algebra 206 (1998); 40–50.

[BM] T. S. Blyth ; R. B. McFadden, *Unit orthodox semigroups.*, Glasgow Math. J. **24** (1983), no. 1, 39–42

[CH] S. Y. Chen ; S. C. Hsieh, *Factorizable inverse semigroups.*, Semigroup Forum **8** (1974), no. 4, 283–297

[Ha1] M. Hartmann, *E-unitary covers over group varieties*, Semigroup Forum **70** (2005), no. 1, 61–70

[Ha2] M. Hartmann, *Almost factorizable orthodox semigroups*, Semigroup Forum **74** (2007), no. 1, 106–124

[Ha3] M. Hartmann, *Embedding into almost factorizable orthodox semigroups*, Acta. Sci. Math., megjelenés alatt

[Ho] John M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[La1] Mark V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific Publishing, 1998.

[La2] M. V. Lawson, *Almost factorizable inverse semigroups*, Glasgow Math. J. **36** (1994), no. 1, 97–111

[McA1] D. B. McAlister, *Groups, semilattices and inverse semigroups. I, II.*, Trans. Amer. Math. Soc. **192**, (1974), 227–244.

[McA2] D. B. McAlister, *Some covering and embedding theorems for inverse semigroups.*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **22** (1976), no. 2, 188–211.

[MR] D. B. McAlister and N. R. Reilly, *E-unitary covers for inverse semigroups*, Pacific J. Math. **68** (1977), no. 1, 161–174

[McF] R. B. McFadden, *Unit-regular orthodox semigroups*, Glasgow Math. J. **25** (1984), no. 2, 229–240

[OCa] L. O'Carroll, *Embedding theorems for proper inverse semigroups*, J. Algebra **42** (1976), no. 1, 26–40

[Pe] M. Petrich, *Inverse semigroups*, Wiley & Sons, 1984.

[Sze1] Mária B. Szendrei, *On a pull-back diagram for orthodox semigroups*, Semigroup Forum **20** (1980), 1–10; Corrigendum: **25** (1982), 311–324.

[Sze2] Mária B. Szendrei, *E-unitary regular semigroups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **106A** (1987), 89–102.

[Sze3] Mária B. Szendrei, *On E-unitary covers of orthodox semigroups*, International Journal of Algebra and Computation Vol. 3, No. 3 (1993); 317–333.

[Sze4] Mária B. Szendrei, *A finite non-embeddable E-unitary regular semigroup*, Semigroups and Applications (Proc. Conf. St. Andrews, 1997), World Scientific, Singapore, 1998; 202–214.

[Sze5] Mária B. Szendrei, *Orthogroup bivarieties are bilocal*, Semigroups with applications (Proc. Conf. Oberwolfach, 1991), World Scientific, Singapore, 1992; 114–131.

[Ta] K. Takizawa, *Orthodox semigroups and E-unitary regular semigroups*, Bull. Tokyo Gakugei Univ., Ser IV **31** (1979), 41–43

6. Összefoglaló

A természetben előforduló lokális szimmetriák matematikai modellezésére halmazok parciális bijekciói használhatók. Adott halmaz parciális bijekciói a parciális leképezésszorzással félcsoportot alkotnak. Ezen félcsoportok inverzképzésre zárt részfélcsoportjainak absztrakt megfelelői az inverz félcsoportok. Az inverz félcsoportok vizsgálatában kiemelt szerep jut két speciális osztálynak, a félhálók (olyan inverz félcsoportok, melyeknek minden eleme idempotens) és a csoportok (olyan inverz félcsoportok, melyekben egyetlen idempotens van) osztályának. Minden inverz félcsoporthoz természetes módon rendelhető félháló, az inverz félcsoportok idempotensei ugyanis felcserélhetők, ezért félhálót alkotnak. Általában az S félcsoport idempotenseinek halmazát $E(S)$-sel jelöljük. Másrészt, mivel minden inverz félcsoporton van egy legszűkebb olyan kongruencia, amely szerinti faktorfélcsoport csoport, ezzel természetes módon hozzárendelhetünk minden inverz félcsoporthoz egy csoportot is. Amennyiben az inverz félcsoport monoid is, újabb csoport rendelhető hozzá. Ugyanis tetszőleges M monoid esetén M egységelemének úgynevezett $\mathcal{H}$-osztálya csoport. Ezt a csoportot $U(M)$-mel jelöljük. Ugyanakkor több lehetőség is van félhálókból és csoportokból inverz félcsoportok konstruálására. Az egyik ilyen lehetőség félhálók csoportokkal vett szemidirekt szorzatainak a képzése.

A jelen értekezés célja, hogy bizonyos, inverz félcsoportokra és félhálók csoportokkal vett szemidirekt szorzataira vonatkozó eredményeket tágabb félcsoportosztályra, az úgynevezett ortodox félcsoportok osztályára terjesszen ki. Az ortodox félcsoportok idempotensei nem feltétlenül cserélhetők fel, így nem félhálót, hanem köteget alkotnak. Ennek megfelelően az ortodox félcsoportokat kötegek csoportokkal vett szemidirekt szorzatai felől közelítjük meg. A továbbiakban köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatát röviden csak szemidirekt szorzatnak nevezzük. Természetesen, amennyiben inverz félcsoportokról van szó, szemidirekt szorzaton félháló köteggel vett szemidirekt szorzatát értjük.

Előzmények — inverz félcsoportok

D. B. McAlister [McA1]-ben vezette be az E-unitér inverz félcsoport fogalmát. Az E-unitér inverz félcsoportok az inverz félcsoportok elméletében fontos szerepet játszanak. Ennek egyik oka, hogy sok természetes módon felmerülő inverz félcsoport E-unitér (pl. a szabad inverz félcsoportok). Másik oka, hogy viszonylag egyszerű struktúrájuk ellenére az E-unitér inverz félcsoportok idempotens-szétválasztó homomorf képeként bármely inverz félcsoport megkapható, amint azt D. B. McAlister alábbi tétele mutatja.

2.5. Tétel. [McA1] *Bármely inverz félcsoportnak van E-unitér fedője.*

Az E-unitér inverz félcsoportok szerkezetét D. B. McAlister a fent említett cikkében írta le, mégpedig egy, a szemidirekt szorzathoz hasonló konstrukció segítségével. Ezt az eredményt felhasználva L. O'Carroll bebizonyította a következő tételt.

2.6. Tétel. [OCa] *Bármely E-unitér inverz félcsoport beágyazható félháló csoporttal vett szemidirekt szorzatába.*

Az előző két tétel következményeként bármely inverz félcsoport megkapható mint szemidirekt szorzat inverz részfélcsoportjának idempotens-szétválasztó homomorf képe.

S. Y. Chen és H. S. Hsieh 1974-ben, a gyűrűelméleti faktorizálhatóság fogalmát általánosítva bevezette a faktorizálható inverz monoid fogalmát, egyben belátta a következő tételt.

2.7. Tétel. [CH] *Bármely inverz félcsoport beágyazható faktorizálható inverz monoidba.*

D. B. McAlister [McA2]-ben közvetve belátta, hogy a faktorizálható inverz monoidok éppen egységelemes szemidirekt szorzatok (idempotens-szétválasztó) homomorf képei. Ezen eredmény és az előző tétel kombinációjából adódik, hogy bármely inverz félcsoport beágyazható szemidirekt szorzat idempotens-szétválasztó homomorf képébe. Egy ilyen beágyazás mindig megadja az inverz félcsoportnak egy E-unitér fedőjét is. D. B. McAlister és N. R. Reilly következő tétele mutatja, hogy így bármely E-unitér fedő megkapható.

2.8. Tétel. [MR] *Legyen S inverz félcsoport, $\iota\colon S \to M$ pedig S beágyazása faktorizálható inverz monoidba. Ekkor az $S \times U(M)$ direkt szorzat*

$$\{(s,g) \in S \times U(M) : s\iota \leq g\}$$

részfélcsoportja E-unitér fedője az S félcsoportnak. Fordítva, S minden E-unitér fedője előáll ezen a módon.

D. B. McAlister [McA2]-ben bevezette a majdnem faktorizálható inverz félcsoport fogalmát is (fedő félcsoport néven), majd belátta, hogy a majdnem faktorizálható inverz félcsoportok éppen szemidirekt szorzatok idempotens-szétválasztó homomorf képei. A majdnem faktorizálható inverz félcsoportok és a faktorizálható inverz monoidok kapcsolatát mutatja M. V. Lawson következő tétele.

2.12. Tétel. [La2] *Ha M faktorizálható inverz monoid, akkor $M \setminus U(M)$ majdnem faktorizálható inverz félcsoport. Fordítva, bármely majdnem faktorizálható inverz félcsoport megkapható így faktorizálható inverz monoidból.*

Előzmények — ortodox félcsoportok

A fenti eredmények ortodox félcsoportokra történő általánosítása a '80-as években kezdődött. M. B. Szendrei és K. Takizawa egymástól függetlenül bizonyították az alábbi tételt, ezzel átalánosítva a 2.5. Tételt.

2.13. Tétel. [Sze1],[Ta] *Minden ortodox félcsoportnak van E-unitér fedője.*

Az S E-unitér reguláris félcsoportot *beágyazhatónak* nevezzük, ha beágyazható köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatába. Ha a szemidirekt szorzat köteg tényezője választható az $E(S)$ köteg által generált varietásból, akkor S-et *közelre beágyazhatónak* nevezzük. B. Billhardt következő tétele mutatja, hogy a 2.6. Tétel nem általánosítható ortodox félcsoportokra.

2.14. Tétel. [Bi] *Létezik olyan E-unitér reguláris félcsoport, amely nem ágyazható be köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatába.*

M. B. Szendrei [Sze2]-ben a közelre beágyazhatóságnak egy ekvivalens feltételét adta meg, és ezt felhasználva bebizonyította a következő tételeket.

2.15. Tétel. [Sze2] *A reguláris köteggel rendelkező E-unitér reguláris félcsoportok közelre beágyazhatók.*

2.16. Tétel. [Sze3] *Biszabad ortodox félcsoportok idempotenstiszta homomorf képei közelre beágyazhatók. Következésképpen bármely ortodox félcsoportnak van közelre beágyazható E-unitér fedője.*

Az utóbbi tétel az inverz félcsoportokra vonatkozó 2.5. és 2.6. Tételek közös általánosításának tekinthető.

Csoportvarietások feletti E-unitér fedők

Az értekezés első fő eredményében a 2.14. Tétel eredményét élesítjük azzal, hogy bármely nemtriviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz megadunk egy olyan E-unitér reguláris félcsoportot, amely legnagyobb csoport homomorf képe eleme az adott varietásnak, viszont nincs beágyazható E-unitér fedője az adott varietás felett.

A konstrukcióhoz szükségünk van a gráf-félcsoportok fogalmára, melyeket csoportok általánosított Cayley-gráfjai, valamint kötegvarietások segítségével lehet definiálni.

3.1. Tétel. *Bármely E-unitér reguláris félcsoport izomorf egy gráf-félcsoporttal.*

A fenti tételt felhasználva, adott E-unitér reguláris félcsoport esetén csoporthomomorfizmusok segítségével megadható E-unitér fedőknek egy elég tág osztálya.

3.3. Tétel. *Legyen S E-unitér reguláris félcsoport. Ekkor bármely G csoport, és annak bármely $\varphi\colon G \to S/\sigma$ szürjektív homomorfizmusa meghatározza S egy G fölötti E-unitér fedőjét. Fordítva, S minden E-unitér fedője tartalmaz olyan reguláris részfélcsoportot, amely szintén E-unitér fedője S-nek, és az előbbi módon megkapható alkalmas G csoport és φ homomorfizmus segítségével.*

Az előbbi tétel, valamint B. Billhardt beágyazhatósági kritériumának felhasználásával bizonyítható a fejezet fő erdménye.

3.8. Tétel. *Bármely $\mathbf{V}$ nemtriviális, de az összes csoportok varietásától különböző csoportvarietáshoz létezik olyan E-unitér reguláris félcsoport, melynek legnagyobb csoport homomorf képe eleme $\mathbf{V}$-nek, azonban nincs $\mathbf{V}$ fölötti beágyazható E-unitér fedője.*

Majdnem faktorizálható ortodox félcsoportok

Az M ortodox monoidot *faktorizálhatónak* nevezzük, ha bármely $s \in M$ esetén létezik olyan $e \in E(M)$ és $u \in U(M)$, amelyekre $s = eu$. A faktorizálható inverz monoidok esetéhez hasonlóan bizonyítható a következő tétel.

4.1. Tétel. *Az M ortodox monoidra az alábbi feltételek ekvivalensek:*

(i) *M faktorizálható,*

(ii) *M köteg monoid csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe,*

(iii) *M köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának homomorf képe.*

Ha S félcsoport, $s \in S$, akkor az s-sel való jobbról szorzás, illetve az s-sel való balról szorzás (mint S transzformációi) között szoros kapcsolat van. Ezen tulajdonság általánosítása vezet S transzlációburkának fogalmához, ami speciális transzformációpárokból áll. Bármely S félcsoport transzlációburka monoid, melynek egységcsoportját $\Sigma(S)$-sel jelöljük. Azt mondjuk, hogy az S ortodox félcsoport *majdnem faktorizálható*, ha bármely $s \in S$ esetén létezik olyan $e \in E(S)$ és $(\lambda, \rho) \in \Sigma(S)$, amelyre $s = e\rho$. Az S ortodox félcsoportot *gyengén fedhetőnek* hívjuk, ha előáll szemidirekt szorzat homomorf képeként.

4.3. Tétel. *Egy ortodox félcsoport akkor és csak akkor majdnem faktorizálható, ha köteg csoporttal vett szemidirekt szorzatának idempotens-szétválasztó homomorf képe.*

Inverz félcsoportok esetén a szemidirekt szorzatok homomorf képei előállnak idempotens-szétválasztó homomorf képekként is. Amint azt a következő példa mutatja, ortodox félcsoportok esetén ez már nem igaz.

4.5. Állítás. *Van olyan kombinatorikus teljesen* 0*-egyszerű gyengén fedhető ortodox félcsoport, amely nem majdnem faktorizálható.*

Az előző állítás mutatja, hogy ortodox félcsoportok gyenge fedhetőségének vizsgálata bonyolultabb, mint az inverz félcsoportoké. Ugyanakkor könnyen látható, hogy a gyengén fedhető ortodox félcsoportok legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható. Ez a feltétel azonban egy, az inverz félcsoportokhoz közeli osztály esetén már elegendő.

4.10. Tétel. *Egy általánosított inverz félcsoport akkor és csak akkor gyengén fedhető, ha legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Az előző feltétel nem alkalmas a gyenge fedhetőség jellemzésére az összes ortodox félcsoport esetén, amint azt az alábbi állítás mutatja.

4.12. Állítás. *Létezik olyan ortodox félcsoport, amely nem gyengén fedhető, de legnagyobb inverz félcsoport homomorf képe majdnem faktorizálható.*

Ortodox félcsoportok beágyazása

Ebben a fejezetben a 2.16. Tétel felhasználásával bebizonyítjuk, hogy bármely ortodox félcsoport beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba. Legyen S ortodox félcsoport, T pedig olyan E-unitér fedője, amely egy biszabad ortodox félcsoport idempotenstiszta homomorf képe. Jelöljön α olyan idempotens-szétválasztó kongruenciát, amelyre $T/\alpha \cong S$. A 2.16. Tétel bizonyítása alapján T beágyazható egy $\mathcal{B} * G$ szemidirekt szorzatba, ahol a $\mathcal{B}$ köteg a T ortodox félcsoport idempotensei által generált varietásnak eleme. Az előbbi beágyazás közelebbi vizsgálatával bizonyítható, hogy az α kongruencia kiterjeszthető $\mathcal{B} * G$-re. Ez a kiterjesztés nem feltétlenül idempotens-szétválasztó, azonban $\mathcal{B} * G$-t egy alkalmas idempotenstiszta kongruenciával faktorizálva olyan $B * G$ szemidirekt szorzat adódik, amelybe T továbbra is beágyazható, valamint amelyre α már idempotens-szétválasztó kongruenciává terjeszthető ki. Így belátható a következő tétel.

5.9. Tétel. *Bármely ortodox félcsoport beágyazható majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba.*

Legyen S ortodox félcsoport, valamint $\iota\colon S \to F$ egy beágyazása az F majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba. Továbbá legyen a $\varphi\colon B * G \to F$ szürjektív idempotens-szétválasztó homomorfizmus egy $B * G$ szemidirekt szorzatról F-re. Ekkor az $\{(e, g) \in B * G : (e, g)\varphi \in S\iota\}$ félcsoport E-unitér fedője S-nek. Azt mondjuk, hogy egy E-unitér fedő *majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból származik*, ha izomorf egy ilyen fedővel. Vegyük észre, hogy az előző tétel bizonyítása során valójában azt láttuk be, hogy bizonyos fedők majdnem faktorizálható ortodox félcsoportokba való beágyazásokból származnak. Amennyiben az ortodox félcsoport kötege reguláris, ez minden E-unitér fedőre igaz, amint azt a szerző alábbi eredménye is mutatja.

5.11. Tétel. [Ha3] Bármely reguláris köteggel rendelkező ortodox félcsoport E-unitér fedői megkaphatók majdnem faktorizálható ortodox félcsoportba való beágyazásból.

7. Summary

A mathematical modelling of partial symmetries appearing in the nature may be done by partial bijections. The partial bijections of a given set constitutes a semigroup. Inverse semigroups are abstract counterparts of subsemigroups of such semigroups closed under taking inverses. Semilattices (inverse semigroups containing only idempotents) and groups (inverse semigroups with a unique idempotent) play an important role in investigations of inverse semigroups. A semilattice can be assigned to every inverse semigroup very naturally, because the idempotents of an inverse semigroup form a semilattice. In the sequel we denote the set of idempotents of an arbitrary semigroup S by $E(S)$. Furthermore, inverse semigroups always have a smallest congruence, denoted by σ, such that the factor semigroup modulo this congruence is a group. This group is called the greatest group homomorphic image of the inverse semigroup. Another possibility of assigning a group to an inverse semigroup arises if the semigroup is a monoid. Namely, if M is an arbitrary monoid, the so-called $\mathcal{H}$-class of the identity forms a subgroup, which is denoted by $U(M)$ in the sequel. On the other hand, there are several ways to produce inverse semigroups from semilattices and groups. One of these ways is taking a semidirect product of a semilattice by a group.

The aim of this dissertation is to generalize some results connecting inverse semigroups and semidirect products to a wider class of semigroups, namely, to the class of orthodox semigroups. The idempotents of an orthodox semigroup need not commute, so they form a band instead of a semilattice. This is why we try to construct orthodox semigroups by taking semidirect products of bands by groups. In the sequel, we call a semidirect product of a band by a group simply a semidirect product. Of course, if we deal with inverse semigroups, then by a semidirect product, we mean a semidirect product of a semilattice by a group. If B is a band, and G is a group acting on B then we denote by $B * G$ the semidirect product of B by G.

Preliminaries - inverse semigroups

The notion of an E-unitary inverse semigroup has been introduced by D. B. McAlister. These semigroups play an important role in the theory of inverse semigroups. One of the reasons is that several natural examples of inverse semigroups are E-unitary (i. e. free inverse semigroups). Another reason is that every inverse semigroup is an idempotent separating homomorphic image of an E-unitary inverse semigroup as the following theorem of D. B. McAlister reveals.

Theorem 2.5. [McA1] *Every inverse semigroup has an E-unitary cover.*

The semidirect product-like structure of E-unitary inverse semigroups was described by D. B. McAlister in the aforementioned article. By making use of this result, L. O'Carroll has proved the following theorem.

Theorem 2.6. [OCa] *Every E-unitary inverse semigroup is embeddable into a semidirect product of a semilattice by a group.*

As a consequence of the previous two theorems, every inverse semigroup is an idempotent separating homomorphic image of a subsemigroup of a semidirect product.

S. Y. Chen and H. S. Hsieh, by generalizing the notion of factorizibility of rings, have introduced the notion of a factorizable inverse monoid, and have proved the following theorem.

Theorem 2.7. [CH] *Every inverse semigroup is embeddable into a factorizable inverse monoid.*

D. B. McAlister [McA2] has proved indirectly that factorizable inverse monoids are exactly the (idempotent separating) homomorphic images of monoid semidirect products. This result together with the previous one implies that every inverse semigroup is embeddable into an idempotent separating homomorphic image of a semidirect product. Such embeddings always give rise to E-unitary covers. The following theorem by D. B. McAlister and N. R. Reilly shows that this way every E-unitary cover arises.

Theorem 2.8. [MR] *Let S be an inverse semigroup, and let $\iota\colon S \to M$ be an embedding of S into a factorizable inverse monoid M. Then the subsemigroup*

$$\{(s, g) \in S \times U(M) : s\iota \le g\})$$

of the direct product $S \times U(M)$ is an E-unitary cover of S. Conversely, every E-unitary cover of S is isomorphic to a semigroup of this kind.

D. B. McAlister [McA2] has introduced the notion of almost factorizable inverse semigroups as well (under the name of covering semigroups), and he has shown that almost factorizable inverse semigroups are just the idempotent separating homomorphic images of semidirect products. The connection between almost factorizable inverse semigroups and factorizable inverse monoids is revealed in the following theorem by M. V. Lawson.

Theorem 2.12. [La2] *If M is a factorizable inverse monoid then $M \setminus U(M)$ is an almost factorizable inverse semigroup. Conversely, every almost* *factorizable inverse semigroup arises in this way from a factorizable inverse monoid.*

Preliminaries - orthodox semigroups

Some of the results formulated for inverse semigroups were generalized in the 1980's. The following theorem, generalizing Theorem 2.5, have been proved independently by M. B. Szendrei and K. Takizawa.

Theorem 2.13. [Sze1],[Ta] *Every orthodox semigroup has an E-unitary cover.*

We say that an E-unitary regular semigroup S is *embeddable* if it is embeddable into a semidirect product of a band by a group. If the band part of the semidirect product can be chosen from the variety generated by the band of idempotents of S, then we call S *closely embeddable.* The following theorem due to B. Billhardt shows that Theorem 2.6 cannot be generalized for the whole class of orthodox semigroups.

Theorem 2.14. [Bi] *There exists an E-unitary regular semigroup that is not embeddable into a semidirect product of a band by a group.*

M. B. Szendrei has given an equivalent condition of embeddability, and by making use of this condition, she has proved the following theorems.

Theorem 2.15. [Sze2] *Every E-unitary regular semigroup having a regular band of idempotents is closely embeddable.*

Theorem 2.16. [Sze3] *The idempotent separating homomorphic images of bifree orthodox semigroups are closely embeddable. Consequently, every orthodox semigroup has a closely embeddable E-unitary cover.*

The last theorem can be seen as a common generalization of Theorems 2.5 and 2.6.

E-unitary covers over group varieties

In this section we sharpen the results of Theorem 2.14 by showing that, given a non-trivial group variety $\mathbf{V}$ distinct from the variety of all groups, there exists an E-unitary regular semigroup such that its greatest group homomorphic image is in $\mathbf{V}$, but it has no embeddable E-unitary cover over $\mathbf{V}$.

Our construction requires the notion of graph-semigroups, which can be defined by making use of generalized Cayley graphs of groups and of band varieties.

Theorem 3.1. *Every E-unitary regular semigroup is isomorphic to a graph-semigroup.*

By applying the previous theorem, one can construct a wide class of E-unitary covers of an E-unitary regular semigroup from group homomorphisms.

Theorem 3.3. *Let S be an E-unitary regular semigroup. Then every group G together with a surjective homomorphism $\varphi\colon G \to S/\sigma$ determines an E-unitary cover of S over G. Conversely, every E-unitary cover of S contains a regular subsemigroup which is also an E-unitary cover of S, and which is isomorphic to an E-unitary cover arising from a group G and a homomorphism φ in this way.*

By making use of the previous theorem and the embeddability condition by B. Billhardt, one can prove the following theorem.

Theorem 3.8. *For every non-trivial group variety $\mathbf{V}$ that is different from the variety of all groups, there exists an E-unitary regular semigroup such that its greatest group homomorphic image is in $\mathbf{V}$, but it has no embeddable E-unitary cover over $\mathbf{V}$.*

Almost factorizable orthodox semigroups

We say that an orthodox monoid M is *factorizable* if for every $s \in M$, there exists $e \in E(M)$ and $u \in U(M)$ such that $s = eu$. The following theorem can be proved in the same way as for inverse monoids.

Theorem 4.1. *Let M be an orthodox monoid. Then the following are equivalent:*

(i) *M is factorizable,*

(ii) *M is an idempotent separating homomorphic image of a semidirect product of a band monoid by a group,*

(iii) *M is a homomorphic image of a semidirect product of a band by a group.*

If S is a semigroup and $s \in S$ then multiplying each element by s on the right, and also on the left, we obtain two transformations of S. The associativity of the multiplication of S determines a link between these two transformations. A generalization of these pairs leads to the notion of the translational hull of S, which consists of certain linked pairs of transformations of S. The translational hull of a semigroup S is a monoid, and we denote its group of units by $\Sigma(S)$. We say that an orthodox semigroup S is *almost factorizable* if for every $s \in S$, there exists $e \in E(S)$ and $(\lambda, \rho) \in \Sigma(S)$ such that $s = e\rho$. An orthodox semigroup S is called *weakly coverable* if it is a homomorphic image of a semidirect product.

Theorem 4.3. *An orthodox semigroup is almost factorizable if and only if it is an idempotent separating homomorphic image of a semidirect product of a band by a group.*

In case of inverse semigroups, homomorphic images of semidirect products are the same as idempotent separating homomorphic images. As the following statement shows, this fails for orthodox semigroups.

Statement 4.5. *There exists a weakly coverable combinatorial completely 0-simple orthodox semigroup, which is not almost factorizable.*

The previous statement shows that the investigation of weak coverability of orthodox semigroups is more complicated than that of inverse semigroups. However, it is easy to see that the greatest inverse semigroup homomorphic image of each weakly coverable inverse semigroup is necessarily almost factorizable. In a special subclass being close to inverse semigroups, this condition is sufficient.

Theorem 4.10. *A generalized inverse semigroup is weakly coverable if and only if its greatest inverse semigroup homomorphic image is almost factorizable.*

The following statement shows that the previous condition is not sufficient for characterizing weak coverability of orthodox semigroups in general.

Statement 4.12. *There exists an orthodox semigroup which is not weakly coverable, but whose greatest inverse semigroup homomorphic image is almost factorizable.*

Embedding orthodox semigroups

In this section, by making use of Theorem 2.16, we prove that every orthodox semigroup is embeddable into an almost factorizable orthodox semigroup. Let S be an orthodox semigroup, and let T be an E-unitary cover of S such that T is an idempotent pure homomorphic image of a bifree orthodox semigroup. Denote by α an idempotent separating congruence of T such that $T/\alpha \cong S$. By the proof of Theorem 2.16, T is embeddable into a semidirect product $\mathcal{B} * G$ where the band $\mathcal{B}$ is in the variety generated by the band of idempotents of T. Investigating the previous embedding, one can show that the congruence α extends to $\mathcal{B} * G$. This extension need not be idempotent separating, however, by factoring out $\mathcal{B} * G$ by an appropriate idempotent pure congruence, we obtain a semidirect product $B * G$ such that T is embeddable into $B * G$. Furthermore, α extends to an idempotent separating congruence of $B * G$. With such an argument, we can prove the following theorem.

Theorem 5.9. *Every orthodox semigroup is embeddable into an almost factorizable orthodox semigroup.*

Let S be an orthodox semigroup, and let $\iota\colon S \to F$ be an embedding of S into an almost factorizable orthodox semigroup F. Furthermore, let $\varphi\colon B * G \to F$ be a surjective idempotent separating homomorphism from a semidirect product $B * G$ onto F. Then the subsemigroup $\{(e, g) \in B * G : (e, g)\varphi \in S\iota\}$ of $B * G$ is an E-unitary cover of S. We say that an E-unitary cover T of S *arises from an embedding into an almost factorizable orthodox semigroup* if it is isomorphic to an E-unitary cover of this kind. Notice that during the proof of the previous theorem, we have shown that certain E-unitary covers arise from embeddings into almost factorizable orthodox semigroups. If the band of idempotents of the orthodox semigroup is regular, this statement is proved by the author to be true for all covers.

Theorem 5.11. [Ha3] *Every E-unitary cover of an orthodox semigroup with regular band of idempotents arises from an embedding into an almost factorizable orthodox semigroup.*