SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi és Informatikai Kar
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Számítógépes Algoritmusok és Mesterséges Intelligencia Tanszék

Speciális faautomata osztályok jellemzése

– doktori értekezés tézisei –

Gyuricza György

Témavezető: Dr. Gécseg Ferenc

Szeged, 2010

Bevezetés

A fanyelvek különböző osztályai közül a determinisztikus felszálló fanyelvek (a továbbiakban DR-fanyelvek) kitüntetett figyelmet kaptak az elmúlt évtizedekben, leginkább azért, mert azok a reguláris fanyelvek valódi részosztálya. Ebből kifolyólag nem minden reguláris fanyelvekre ismert tulajdonság marad feltétlenül igaz erre a szűkebb nyelvosztályra. Azt is megállapíthatjuk, hogy a determinisztikus felszálló fanyelvekről teljes általánosságban keveset tudunk. Szerettük volna mindezért a vizsgálatunkat egy jól körülhatárolt területre irányítani. A DR-fanyelvek egyes alosztályai (monoton, nilpotens, definit, stb.) már meg-megvizsgálásra kerültek, és különböző módon, például szintaktikus monoidokkal jellemezték őket. A monoton sztring nyelvekre például, ahol a sztring nyelvek alatt a klasszikus értelemben ismert véges automaták által felismert nyelveket értjük, Gécseg F. és Imreh B. adott egy reguláris kifejezésekkel történő jellemzést is (lásd [5]). Ez adta az ötletet, hogy a monoton DR-fanyelvekre is lehetne adni egy ilyen irányú jellemzést, és ugyanúgy adta magát a nilpotens sztring nyelvek és nilpotens DR-fanyelvek reguláris kifejezésekkel való leírása. Ezen irányú kutatásaink eredménye szolgáltatja az értekezés gerincét.

Az értekezés elején természetesen azokat az alapfogalmakat definiáltuk, amelyekre az értekezés további részében támaszkodtunk. Egyes előkészületeket is itt végeztünk el, mint például a redukált reguláris kifejezések definiálását. Az alapfogalmakon túl nyilvánvalóan szükség volt néhány algebrai fogalom előzetes ismeretére, ezek meglétét feltételeztük.

Gécseg és Imreh megállapította [5]-ben, hogy egy sztring nyelv akkor és csakis akkor monoton, ha előállítható szeminormális láncnyelvek véges egyesítéseként. A monoton DR-fanyelvek jellemzésénél ugyanezt az alapötletet kívántuk követni, azaz, hogy egy fa monoton DR-faautomatában való feldolgozásakor az állapotok egy monoton sorozatát tudjuk felírni, és így a nyelv leírását is erre építeni.

A nilpotens nyelvek is jellemzésre kerültek Gécseg és Imreh által, a [4] cikkben például szintaktikus monoidokkal jellemezték a nilpotens DR-fanyelveket, ugyanakkor azonban a reguláris kifejezésekkel való leírásra nem került sor. Ezért itt a cél az volt, hogy mind a nilpotens sztring nyelvekhez, mind a nilpotens DR-fanyelvekhez adjunk egy reguláris kifejezésekkel történő jellemzést.

Mivel a monoton és nilpotens DR-fanyelvek jellemzésénél szükségünk volt egyes zártsági tulajdonságokra, vagy a zártságot biztosító feltételekre, az értekezés végén összefoglalásra kerültek a DR-fanyelvek zártsági tulajdonságai a Boole- (egyesítés, metszet, komplementerképzés), valamint a reguláris (egyesítés, x-szorzat, x-iteráció, σ-szorzat) műveletekre nézve. Itt külön feltüntetésre kerültek a monoton- és nilpotens alosztályokra vonatkozó eredmények, és néhány esetben a zártságot biztosító elégséges feltételeket is összegeztük. Megállapításaink többsége [3], [10], [11] és [12]-ből származnak.

Eredmények

Ahogy az a bevezetőben is említésre került, a kutatásunk a monoton és nilpotens nyelvek vizsgálatára irányult, ahol ezen kutatás eredményeképpen reguláris kifejezésekkel jellemeztük a fenti osztályokat mind a sztring nyelvek, mind a DR-fanyelvek esetében, valamint megvizsgálásra került a fenti osztályok néhány zártsági tulajdonsága a Boole- és reguláris műveletekre nézve. Az értekezés célja a fenti eredmények és a hozzájuk tartozó összefüggések ismertetése, amelyben a reguláris kifejezésekkel való jellemzés bír lényegi tartalommal, a zártsági tulajdonságok vizsgálata pedig mellékes szereppel. Az értekezésnek azonban nem célja a monoton- és nilpotens nyelvek egyéb tulajdonságainak a vizsgálata, és így annak ismertetése sem.

Az eredményeket a következő fejezetekre tagoltuk:

1. **Alapfogalmak, előkészületek** – egyes itt szereplő fogalmak [10]-ben lettek bevezetve.

2. **Monoton nyelvek** – a monoton nyelvek jellemzése [10]-ben lett közölve.

3. **Nilpotens nyelvek** – ezen fejezet eredményei [11]-ből származnak.

4. **Zártsági tulajdonságok** – a zártsági tulajdonságokkal kapcsolatos eredmények nagyrészt [3]-ból származnak, ugyanakkor két részeredmény [10] és [11]-ben lett közölve.

1. Alapfogalmak, előkészületek

Ebben a fejezetben olyan alapfogalmakat definiáltunk, amelyek ismeretére mindenképpen szükség van a főeredmények megértéséhez. Itt kerülnek ismertetésre az ábécé, véges automata, nyelv, valamint a reguláris kifejezések fogalma. A reguláris kifejezéseknél definiáljuk a redundáns részkifejezés fogalmát (úgy mint azon részkifejezés, amelynek elhagyásával az egész reguláris kifejezés által leírt nyelv nem változik), és ezzel vezetjük be a redukált reguláris kifejezés fogalmát (amely nem tartalmaz redundáns részkifejezéseket).

Később hasonló módon ismertetjük a determinisztikus felszálló algebra, faautomata és fanyelv fogalmát. Ugyanúgy felidézzük a reguláris ΣX_n-kifejezéseket és definiáljuk azok redukált formáit. Definiáljuk a DR-fanyelvek vizsgálatában igen hasznos x-utakat (melyek halmazát g_x-szel jelöljük), és néhány fákon értelmezett függvényt, mint például a root, height, leaves és Sub, amelyeket később előszeretettel használunk. Itt jegyezzük meg, hogy gyakorlati megfontolásból a nullváltozós műveleti szimbólumok halmazát végig üresnek tekintjük.

2. Monoton nyelvek

2.1. Monoton sztring nyelvek

Gécseg és Imreh megállapította, hogy egy sztring nyelv akkor és csakis akkor monoton, ha előállítható véges sok szeminormális láncnyelv egyesítéseként. Ez a jellemzés gyakorlatilag azt írja le, hogy egy monoton automata milyen sorrendben halad az állapotain keresztül, míg fel nem ismeri a vizsgált szót, ahol az összes ilyen lehetséges állapotsorozat egy szeminormális láncnak felel meg. Ez adta az ötletet, hogy a monoton DR-fanyelveket is az őket felismerő monoton DR-faautomaták állapotainak sorozata szerint írjuk majd le.

Ezután bevezettük az iterációs magasság fogalmát mind a reguláris kifejezésekre, mind az általuk leírt sztring nyelvekre. Egy nyelv iterációs magassága az annak iterációjában résztvevő szavak közül a leghosszabb hosszával egyenlő. Ugyan az iterációs magasságnak a monoton DR-fanyelvek vizsgálatánál lesz fontos szerepe, azok az eredmények azonban a sztring nyelvekre is érvényesek.

2.1.7. segédtétel. *Egy $(\zeta)^*$ alakban adott monoton sztring nyelvet leíró redukált reguláris kifejezés iterációs magassága legfeljebb* 1.

2.2. Monoton DR-fanyelvek

A DR-fanyelvek esetében is definiáljuk az (x-szerinti) iterációs magasságot, amely azon leghosszabb x-út hosszát jelöli, amely egy adott fanyelv x-iterációjában szerepet játszik. Itt ugyanúgy megmutattuk a monotonitás és iterációs magasság kapcsolatát mint a sztring nyelvek esetében.

Ennek később is lesz szerepe, amikor a monoton DR-fanyelvek zártságát vizsgáljuk az x-iterációra nézve.

2.2.5. segédtétel. *Egy $(\zeta)^{*,x}$ alakban adott monoton fanyelvet leíró redukált reguláris ΣX_n-kifejezés x-szerinti iterációs magassága legfeljebb* 1.

A következőkben vegyünk egy $\mathfrak{A}$ monoton DR-faautomatát. Ahogy a sztring esetben is megfigyelhettük, itt is felírható az állapotok egy sorrendje, amelyeken végighaladva egy-egy fát felismerünk. Ennek leírására alkottuk meg az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris kifejezést:

$$\eta_{\mathfrak{A}} = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0,$$

ahol minden $\eta_i \quad (0 \leq i \leq k)$

$$(p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i}$$

alakú. Ez a kifejezés (jobbról balra olvasva) gyakorlatilag $\mathfrak{A}$ működését írja le. Minden egyes η_i egy a_i állapot működését szimulálja, ahol a t^i-k olyan $\sigma(\xi, \ldots, \xi)$ alakú fák, amelyekre a_i előfordul $\sigma(a_i)$ elemei között, míg a p^i-k olyan $\omega(\xi, \ldots, \xi)$ alakú fák, amelyekre a_i nem fordul elő $\omega(a_i)$ elemei között. A ξ-k mindegyike a $\xi_0, \ldots, \xi_k$ segédváltozókból kerül ki, ezek egy az egyben $\mathfrak{A}$ állapotait jelentik. Az y^i-k azok a változók, amelyeket le tudunk vezetni a_i-ből. Megfigyelhetjük, hogy a t^i fákat összefogja még egy ξ_i-iteráció, ugyanis a t^i-k gyökerében lévő műveleti szimbólumokat a_i-n bármennyiszer alkalmazva mindig egy olyan állapotvektort kapunk, amelyben szerepel a_i. A könnyebb hivatkozás céljából az egész $\eta_{\mathfrak{A}}$ kifejezést láncnak, a t^i-s részt iterációs résznek, a p^i-ket és y^i-ket összefogó részt pedig termináló résznek nevezzük. Megmutattuk, hogy $\eta_{\mathfrak{A}}$ a $T(\mathfrak{A})$ nyelvet írja le.

2.3.1. segédtétel. *Bármely $\mathfrak{A}$ monoton DR-faautomata esetén érvényes a $T(\mathfrak{A}) = T(\eta_{\mathfrak{A}})$ egyenlőség.*

Ez a triviális leírás természetesen egyszerűsíthető, már csak azért is, mert egy DR-fanyelvet több különböző DR-faautomata is fel tud ismerni. Ezért is volt érdemes megvizsgálni $\eta_{\mathfrak{A}}$ ekvivalens átalakításait, hiszen azokkal általánosabb formát kaphatunk. Az egyik kézenfekvő átalakítás az η_i tényezőben való felbontás, ha ez egyáltalán lehetséges. Erre vonatkozóan született az alábbi tétel.

2.4.3. tétel. *Az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ kifejezés akkor és csakis akkor bontható fel az η_i tényezőben, ha η_i iterációs részében lévő minden fa leveleiben legfeljebb egyszer szerepel a ξ_i segédváltozó.*

Egy másik egyszerűsítési lehetőség a segédváltozók számának csökkentése. Ezt úgy érhetjük el, hogy egyes változókat vagy segédváltozókat újra felhasználunk a fenti triviális leírásban. Ha például van a fenti láncban egy ξ_j segédváltozó, amely az η_i tényező termináló részében fordul elő először (a lánc jobbról balra haladó kiértékelése folyamán), akkor ξ_j minden láncbeli előfordulását helyettesíthetjük ξ_i-vel. Ezt azért is tehetjük meg, mert ξ_i már nincs használva η_i termináló részében, vagy ennél magasabb indexű η_i-kben. Ennek kapcsán egy érdekes állítás is igazolásra került.

2.5.2. segédtétel. *A $\Sigma = \Sigma_1$ esetben bármely $\mathfrak{A}$ monoton DR-faautomatához tartozó $\eta_{\mathfrak{A}}$ felírható legfeljebb egy segédváltozó használatával.*

A monoton DR-fanyelvek jellemzése felé haladva fel kell idéznünk azt a tényt, hogy a DR-fanyelvek (és a monoton alosztálya is) ugyan zártak a σ-szorzatra, de nem zártak a többi reguláris műveletre. Ezért vált szükségessé azon feltételek meghatározása, amelyek mellett a monoton DR-fanyelvek zártak az x-szorzat-, illetve az x-iteráció műveletekre. Ehhez legyen $\Sigma_{S,x}$ azon σ műveleti szimbólumokat tartalmazó halmaz, amelyekre léteznek S-beli x-utak úgy, hogy ezt az x-utat egy $\hat{\Sigma}_\sigma$-beli betűvel kiegészítve és további alkalmas $\hat{\Sigma}^*$-beli szót hozzávéve egy másik S-beli úthoz jutunk. Ezen fogalom használatával az alábbi fontos tételt fogalmaztuk meg.

2.6.5. tétel. *Tetszőleges S és T monoton DR-fanyelvekre, ha $\Sigma_{S,x}$ és* $\mathrm{root}(T)$ *diszjunkt, akkor $T \cdot_x S$ monoton.*

Egy további fontos tulajdonság az x-homogenitás. Azt mondjuk, hogy egy T fanyelv x-homogén, ha nincs olyan $p \in T$ fa, amelyre léteznek $u, v \in g_x(p)$, $w \in \hat{\Sigma}^*$ és $z \in X_n$, hogy $uw \in g_z(T)$ és $vw \notin g_z(T)$. Ez fogja majd biztosítani azt, hogy ha egy DR-faautomatában két különböző állapotból is le lehet vezetni az x változót, akkor e két állapotból ugyanazon részfákat lehessen felismerni. Megállapítottuk a következőket.

2.6.11. következmény. *Ha egy T DR-fanyelv $T^{*,x}$ iteráltja monoton DR-fanyelv, akkor T x-homogén és $T^{*,x}$ iterációs magassága legfeljebb* 1.

2.6.12. tétel. *Ha egy T monoton DR-fanyelv x-homogén, $T^{*,x}$ iterációs magassága legfeljebb* 1, *valamint $\Sigma_{T,x}$ és* $\mathrm{root}(T)$ *diszjunkt, akkor $T^{*,x}$ monoton DR-fanyelv.*

Az eddigi eredményekkel minden eszköz a rendelkezésünkre áll, hogy végre leírjuk a monoton DR-fanyelveket. Egy $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ fanyelvet R-láncnyelvnek nevezünk, ha minden i $(0 \leq i \leq k)$ indexre η_i a $(T_i) \cdot_{\xi_i} (S_i)^{*,\xi_i}$ alakban adott, ahol S_i és T_i véges DR-fanyelvek, és amelyekre S_i ξ_i-homogén, $(S_i)^{*,\xi_i}$ iterációs magassága legfeljebb 1, $\mathrm{root}(S_i) \cap \Sigma_{S_i,\xi_i} = \emptyset$ és $\mathrm{root}(T_i) \cap (\mathrm{root}(S_i) \cup \Sigma_{S_i,\xi_i}) = \emptyset$. A fenti η R-láncnyelvet általánosítottnak mondjuk, ha $\mathrm{root}(T(\eta_i)) \cap \Sigma_{T(\eta_{i-1} \cdot_{\xi_{i-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0),\xi_i} = \emptyset$ minden i $(1 \leq i \leq k)$ indexre teljesül. Ezzel kimondhatjuk a kívánt jellemzést, amely a monoton nyelvekről szóló fejezet főeredménye.

2.6.15. tétel. *Egy DR-fanyelv akkor és csakis akkor monoton, ha megadható általánosított R-láncnyelvként.*

3. Nilpotens nyelvek

3.1. Nilpotens sztring nyelvek

A nilpotens nyelveket felismerő automatákban közös az, hogy van bennük egy nilpotens elem (csapda állapot), amelybe minden az automata nilpotencia fokánál nem rövidebb szó olvasása elvezet, és onnan már nem is lehet más állapotokat elérni, sőt, ez az egyedüli állapot, amelyből önmagába lehet jutni. Ez azt jelenti, hogy ha le szeretnénk írni az automata állapotainak szavak olvasásához köthető lehetséges sorozatait, akkor egy monoton sorozatot kapnánk, ezért is mondhatjuk, hogy minden nilpotens nyelv monoton. Ugyanakkor ezt a szabályszerűséget szeretnénk kihasználni, amikor a nilpotens nyelveket jellemezzük.

Bevezettünk egy új fogalmat, amely szerint egy $L_0 x_1 L_1 x_2 \ldots x_k L_k \subseteq X^*$ láncnyelvet simának nevezünk, ha minden k-nál kisebb i indexre $L_i = \{e\}$, és ha $L_k = Y^*$, ahol $Y = \emptyset$ vagy $Y = X$. A sima láncnyelvek tehát $\zeta = x_1 x_2 \ldots x_k L_k$ alakúak. Azt mondjuk, hogy ζ véges, ha $L_k = \{e\}$, illetve ζ végtelen, ha $L_k = X^*$, továbbá ζ hosszát k-ban állapítjuk meg. Azt mondjuk, hogy egy $\zeta' = x_1 x_2 \ldots x_j$ sima láncnyelv prefixe ζ-nak, ha $1 \leq j \leq k$, vagy ha $j > k$, de ekkor $x_{k+1} \ldots x_j \in L_k$. Ezek alapján X^* minden szava tekinthető véges sima láncnyelvnek. Sőt, minden véges nyelv megadható véges sok sima láncnyelv egyesítéseként.

A sima láncnyelvekkel és azok prefixeivel hatékonyan tudjuk jellemezni a nilpotens nyelveket. Igazoltuk, hogy amennyiben egy sima láncnyelvek véges egyesítéseként megadott végtelen nyelvre igaz, hogy bármelyik X^*-beli szó prefixe a szóbanforgó sima láncnyelvek egyikének, akkor ez a nyelv nilpotens. Sőt, ennek megfordítását is beláttuk, miszerint minden nilpotens nyelv megadható véges sok sima láncnyelv egyesítéseként, ahol amennyiben a szóbanforgó nyelv végtelen, akkor minden X^*-beli szó prefixe a nyelvet leíró sima láncnyelvek egyikének. Ezeket összegezve megkaptuk a nilpotens sztring nyelvek reguláris kifejezésekkel való jellemzését.

3.1.18. tétel. *Egy reguláris nyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha az megadható véges sok sima láncnyelv egyesítéseként, ahol amennyiben a szóbanforgó nyelv végtelen, akkor minden X^*-beli szó prefixe a nyelvet leíró sima láncnyelvek egyikének.*

3.2. Nilpotens DR-fanyelvek

Mivel a nilpotens DR-fanyelvek egyben monoton DR-fanyelvek is, így logikusnak tűnik a triviális reguláris kifejezés megvizsgálása egy tetszőleges $\mathfrak{A}$ nilpotens DR-faautomata esetében. Vegyük az így kapott $\zeta_{\mathfrak{A}} = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ kifejezést. Nyilvánvaló, hogy η_k-t kivéve minden η_i-ben az iterációs rész üres, mivel nincs olyan műveleti szimbólum és a nilpotens elemtől különböző állapot, amelyre ez az állapot előfordulna a művelettel vett eredményvektorában. Ezek szerint ezeket az iterációs részeket elhagyhatjuk $\zeta_{\mathfrak{A}}$-ból. Ezzel leegyszerűsítettük az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris kifejezést, amelyet az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó sima reguláris kifejezésnek fogunk nevezni.

Ezután a nilpotens DR-fanyelvek x-szorzatra való zártságát szerettük volna biztosítani, ehhez szükségesek a következő fogalmak. Egy S fanyelv út-teljes, ha bármely S-beli út bármely prefixében az utolsó betűt egy másikra cserélve olyan szót kapunk, ami szintén egy S-beli út prefixe. Megállapítottuk a következő segédtételt.

3.3.4. segédtétel. *Bármely két út-teljes fanyelv x-szorzata is út-teljes.*

Egy másik fontos fogalom az x-termináló tulajdonság, amellyel akkor rendelkezik egy tetszőleges S fanyelv, ha bármely olyan S-beli u útra, amely nem valódi prefixe egyetlen más S-beli útnak sem, teljesül, hogy u egy S-beli x-út. Ezen fogalmak segítségével már meg tudjuk fogalmazni azokat a feltételeket, amelyek ahhoz kellenek, hogy két nilpotens DR-fanyelv x-szorzata is nilpotens legyen.

3.3.6. tétel. *Legyenek S és T tetszőleges nilpotens DR-fanyelvek, ahol S véges, út-teljes és x-termináló, valamint $\Sigma_{S,x}$ és* $\mathrm{root}(T)$ *diszjunkt. Ekkor $T \cdot_x S$ nilpotens.*

Az eddigiek után nem maradt más hátra, mint kimondani a nilpotens DR-fanyelvek reguláris kifejezésekkel való jellemzését. Nevezzük el ehhez sima R-láncnyelvnek az olyan $\eta_k \cdot_{\xi_k} \dots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ alakú láncokat, ahol minden k-nál kisebb i indexre $T(\eta_i)$ véges és út-teljes, a $T(\eta_i) \setminus X_n$ fák leveleinek halmaza $\{\xi_{i+1}, \dots, \xi_k\}$ nemüres részhalmaza, valamint $\mathrm{root}(T(\eta_{i+1}))$ és $\Sigma_{T(\eta_i \cdot_{\xi_i} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0), \xi_{i+1}}$ diszjunktak, továbbá $T(\eta_k) = Z \cdot_{\xi_k} T_\Sigma(Y \cup \{\xi_k\})$, ahol Y és Z a változók halmazának egy-egy részhalmaza. Ezt felhasználva beláttuk a nilpotens nyelvekről szóló fejezet főeredményét.

3.3.9. tétel. *Egy DR-fanyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha ő egy sima R-láncnyelv.*

4. Zártsági tulajdonságok

Az értekezés során többször szükségünk volt a DR-fanyelvek, illetve azok nilpotens- és monoton alosztályainak a Boole- és reguláris műveletekre vonatkozó zártsági tulajdonságaira, így hasznosnak találtuk azok összegzését, esetenként megvizsgálását. Több esetben, amikor egy adott osztály nem volt zárt az adott műveletre, összegyűjtöttünk olyan feltételeket is, amelyekkel biztosítható volt a zártság. Elöljáróban rögzítsük le, hogy tetszőleges $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ és $\mathcal{B} = (B, \Sigma)$ DR Σ-algebrák direkt szorzatán az $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (A \times B, \Sigma)$ DR Σ-algebrát értjük, ahol bármely $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $(a, b) \in A \times B$ elempárra $\sigma^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((a, b)) = ((\pi_1(\sigma^{\mathcal{A}}(a)), \pi_1(\sigma^{\mathcal{B}}(b))), \dots, (\pi_m(\sigma^{\mathcal{A}}(a)), \pi_m(\sigma^{\mathcal{B}}(b))))$ teljesül, és ahol π_i az i-edik projekció.

4.1. Egyesítés

Tudjuk, hogy a DR-fanyelvek nem zártak az egyesítésre, és így sem a monoton-, sem a nilpotens alosztályok nem zártak rá. Ugyanakkor megfogalmazható olyan feltétel, amely mellett már biztosított a zártság. Ehhez be kellett vezeti az egyesítés direkt szorzat fogalmát, amely tetszőleges $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ és $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ DR ΣX_n-faautomaták esetén azzal az $\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B} = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}, (a_0, b_0), \mathbf{a} \times^{\cup} \mathbf{b})$ DR ΣX_n-faautomatával egyezik meg, amelyre $\mathbf{a} \times^{\cup} \mathbf{b} \in \mathfrak{p}(A \times B)^n$ és $(\mathbf{a} \times^{\cup} \mathbf{b})^{(i)} = (A^{(i)} \times B) \cup (A \times B^{(i)})$ teljesül $(1 \leq i \leq n)$.

4.1.4. tétel. *Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két normalizált DR ΣX_n-faautomata. Ekkor $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$ akkor és csakis akkor determinisztikus, ha $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B})$.*

A fenti tételt felhasználva megállapítottuk, hogy tetszőleges S és T nilpotens (monoton) DR-fanyelvek esetén $S \cup T$ akkor és csakis akkor nilpotens (monoton), ha determinisztikus.

Ezután arra vonatkozóan adtunk feltételeket, hogy mikor nem determinisztikus két DR-fanyelv egyesítése.

4.1.7. tétel. *Tetszőleges S és T DR-fanyelvek esetén $S \cup T$ akkor és csakis akkor nem determinisztikus, ha van olyan p fa, x, y változók, valamint $u \in g_x(p)$ és $v \in g_y(p)$ különböző utak, hogy $u \in g_x(S) \setminus g_x(T)$ és $v \in g_y(T) \setminus g_y(S)$.*

Mivel az előző tételt kielégítő fák nem unárisak, így érvényes azon következmény, mely szerint tetszőleges S és T DR-fanyelvek esetén ha S és T közül az egyik csupán az unáris fáiban különbözik a másiktól, akkor $S \cup T$ determinisztikus. Ugyanezen állítás érvényes mind a monoton-, mind a nilpotens alosztályokra is. Szintén az előző tételre alapul azon következmény, amely szerint ha két (nilpotens, monoton) DR-fanyelv gyökérszimbólumainak halmaza diszjunkt, akkor ezen két DR-fanyelv egyesítése is (nilpotens, monoton) DR-fanyelv.

A továbbiakban arra is adtunk feltételeket, amelyek mellett két nilpotens DR-fanyelv egyesítése nem nilpotens. Ha például S és T olyan nilpotens DR-fanyelvek, hogy $S \setminus T$-ben nem csak unáris műveleti szimbólumok vannak, továbbá van olyan x változó, amelyre $g_x(T) \setminus g_x(S)$ végtelen, akkor $S \cup T$ nem nilpotens. Vagy ha S véges-, T pedig végtelen nilpotens DR-fanyelv, és az $S \setminus T$ különbségben nem csak unáris műveleti szimbólumok vannak, akkor $S \cup T$ nem nilpotens.

4.2. Metszet

Az egyesítés direkt szorzathoz hasonlóan definiálhatjuk a metszet direkt szorzat fogalmát, amely tetszőleges $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ és $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ DR ΣX_n-faautomaták esetén azzal az $\mathfrak{A} \times^{\cap} \mathfrak{B} = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}, (a_0, b_0), \mathbf{a} \times^{\cap} \mathbf{b})$ DR ΣX_n-faautomatával egyezik meg, amelyre $(\mathbf{a} \times^{\cap} \mathbf{b}) \in \mathfrak{p}(A \times B)^n$ és $(\mathbf{a} \times^{\cap} \mathbf{b})^{(i)} = A^{(i)} \times B^{(i)}$ teljesül $(1 \leq i \leq n)$. Ekkor igaz az alábbi tétel.

4.2.2. tétel. *Tetszőleges $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ DR ΣX_n-faautomatákra $T(\mathfrak{A}) \cap T(\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A} \times^{\cap} \mathfrak{B})$.*

Ez azt jelenti, hogy a DR-fanyelvek osztálya zárt a metszetképzésre nézve, és $T(\mathfrak{A} \times^{\cap} \mathfrak{B})$ felépítéséből az is következik, hogy mind a monoton-, mind a nilpotens DR-fanyelvek osztálya is zárt a metszetképzésre.

4.3. Komplementerképzés

Ismert tény, hogy a DR-fanyelvek osztálya nem zárt a komplementerképzésre, így sem a monoton-, sem a nilpotens alosztályok nem zártak rá. A nilpotens DR-fanyelvek esetében azonban meghatároztunk olyan feltételeket, amelyek mellett biztosítható a zártság. Egy tetszőleges T fanyelv esetén legyen $T(x)$ az a fanyelv, amely T azon (unáris) fáiból áll, amelyek levelei mindegyikén az x változó szerepel, továbbá jelöljük T komplementerét $\mathrm{c}(T)$-vel. Ha a rangolt ábécénkben csupán unáris műveleti szimbólumok vannak, akkor T akkor és csakis akkor nilpotens, ha $T(x)$ vagy $\mathrm{c}(T)(x)$ véges. Sőt, unáris műveleti szimbólumok esetén az is érvényes, hogy T akkor és csakis akkor nilpotens, ha $\mathrm{c}(T)$ nilpotens.

Nem csak unáris műveleti szimbólumokból álló rangolt ábécé esetén megállapítottuk, hogy egy csupán unáris fákból álló fanyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha véges, sőt, amennyiben nilpotens, akkor a komplementere is nilpotens. Megállapítottuk továbbá, hogy amennyiben T tetszőleges végtelen nilpotens fanyelv, és T komplementere nem csak unáris fákból áll, akkor $\mathrm{c}(T)$ nem nilpotens. Ugyanúgy igaz a következő tétel.

4.3.7. tétel. *Tegyük fel, hogy Σ-ban létezik legalább egy olyan műveleti szimbólum, amelynek aritása nagyobb 1-nél. Ekkor tetszőleges T fanyelv esetén T és $\mathrm{c}(T)$ akkor és csakis akkor egyidejűleg nilpotens, ha T és $\mathrm{c}(T)$ közül az egyik véges sok unáris fából áll.*

4.4. x-szorzat

A DR-fanyelvek osztálya nem zárt az x-szorzatra nézve, és ugyanez elmondható a monoton- illetve nilpotens DR-fanyelvekre is. Mindkét esetben azonban meghatároztunk olyan feltételeket, amelyek mellett biztosítható az x-szorzatra való zártság, ezekre vonatkoznak a 2.6.5. illetve a 3.3.6. tételek.

4.5. x-iteráció

Az x-iteráció szintén egy olyan művelet, amelyre nem zárt a DR-fanyelvek osztálya, és ebből kifolyólag sem a monoton-, sem a nilpotens DR-fanyelvek nem zártak rá. A monoton DR-fanyelvek esetében szükségünk volt arra, hogy megvizsgáljuk azokat a feltételeket, amelyek garantálják egy monoton DR-fanyelv x-iteráltjának monotonitását, erre vonatkozik a 2.6.12. tétel. A nilpotens DR-fanyelvek esetében ilyen feltételek meghatározására nem volt szükségünk, és így nem is tértünk ki rá.

4.6. σ-szorzat

A σ-szorzat érdekesnek bizonyult a vizsgálatainkban, ugyanis itt eltérő eredmények születtek a monoton- illetve a nilpotens DR-fanyelvek esetében. Ismeretes összefüggés, hogy a DR-fanyelvek osztálya zárt a σ-szorzatra, és könnyen látható, hogy a monoton alosztály is az. A nilpotens DR-fanyelvek azonban nem zártak rá, ahogy azt az értekezésben egy ellenpéldával is illusztráltuk.

4.7. Zártsági tulajdonságok összegzése

Az alábbi táblázatban összefoglaltuk a DR-fanyelvek, illetve a nilpotens- és monoton DR-fanyelvek zártsági tulajdonságait a Boole- és a reguláris műveletekre nézve.

Zárt ?	$\cup$	$\cap$	$\setminus$	x-szorzat	x-iteráció	σ-szorzat
DR	nem	igen	nem	nem	nem	igen
nilpotens	nem	igen	nem	nem	nem	nem
monoton	nem	igen	nem	nem	nem	igen

Hivatkozások

[1] Courcelle, B.: A representation of trees by languages I, *Theoretical Computer Science*, **6** (1978), 255-279.

[2] Gécseg, F.: On some classes of tree automata and tree languages, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Mathematica.* **25** (2000), 325-336.

[3] Gécseg, F. and Gyurica, Gy.: On the closedness of nilpotent DR tree languages under Boolean operations, *Acta Cybernetica,* **17** (2006), 449-457.

[4] Gécseg, F. and Imreh, B.: On definite and nilpotent DR tree languages, *Journal of Automata, Languages, and Combinatorics.* **9:1** (2004), 55-60.

[5] Gécseg, F. and Imreh, B.: On monotone automata and monotone languages, *Journal of Automata, Languages, and Combinatorics.* **7** (2002), 71-82.

[6] Gécseg, F. and Peák, I.: *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1972.

[7] Gécseg, F. and Steinby, M.: Minimal ascending tree automata, *Acta Cybernetica,* **4** (1978), 37-44.

[8] Gécseg, F. and Steinby, M.: Minimal Recognizers and Syntactic Monoids of DR Tree Languages, in *Words, Semigroups, & Transductions*, World Scientifics (2001), 155-167.

[9] Gécseg, F. and Steinby, M.: *Tree Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1984.

[10] Gyurica, Gy.: On monotone languages and their characterization by regular expressions, *Acta Cybernetica*, **18** (2007), 117-134.

[11] Gyurica, Gy.: On nilpotent languages and their characterization by regular expressions, *Acta Cybernetica*, **19** (2009), 231-244.

[12] Jurvanen, E.: *On Tree Languages Defined by Deterministic Root-to-frontier Recognizers*, Ph.D. Thesis, University of Turku, Turku, 1995, ISBN 952-90-7096-9.

[13] Jurvanen, E.: The Boolean closure of DR-recognizable tree languages, *Acta Cybernetica,* **10** (1992), 255-272.

[14] Ševrin, L. N.: On some classes of abstract automata. *Uspehi matem. nauk*, **17:6 (108)** (1962), 219.

[15] Virágh, J.: Deterministic ascending tree automata I, *Acta Cybernetica,* **5** (1980), 33-42.