Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

MONADIKUS INTERVALLUMOK

Dormán Miklós

Témavezető
Dr. Szendrei Ágnes

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szeged
2009

1. Bevezetés

A monadikus intervallumok története csupán néhány évtizedes múlttal büszkélkedhet, de szorosan kapcsolódik az univerzális algebra egyik központi témájához, a műveletek kompozíciójának vizsgálatához. Műveletek olyan halmazai, amelyek a kompozícióra zártak természetes módon jelennek meg a logikában, az algebrában és a számítástudományban. Kompozícióra zárt műveleteket tartalmazó halmazok vizsgálatát kételemű halmazon E. L. Post [Pos41] indította el. A klón fogalma P. Hall-tól származik, aki csoportosztályok szóproblémájának tanulmányozása kapcsán jutott el a klón fogalomához, azaz műveletek olyan halmazához, amely zárt a kompozícióra és tartalmazza a projekciókat.

Az összes klónok halmaza az A halmazon teljes hálót alkot a (halmazelméleti) tartalmazásra vonatkozóan, amelyet $\mathbb{CL}_A$-val jelölünk.

Ha az A halmaz kételemű, akkor a $\mathbb{CL}_A$ klónháló megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz, és szerkezete E. L. Post eredményeinek nyomán teljesen ismert (vö. [Pos41]). Míg kételemű halmazon $\aleph_0$ klón van, legalább háromelemű halmaz esetében a helyzet lényegesen bonyolultabb. Ju. I. Janov és A. A. Mučnik [JM59]-ban megmutatta, hogy legalább háromelemű véges halmazon $2^{\aleph_0}$ klón van. A. A. Bulatov eredményei a [Bul92] és [Bul94] cikkekben pedig azt mutatják, hogy $\mathbb{CL}_A$ szerkezete rendkívül bonyolult, nevezetesen, tetszőleges A véges halmaz esetén:

- ha $|A| \geqslant 3$, akkor $\mathbb{CL}_A$-ba beágyazható az egy elemmel generált abszolút szabad félcsoport részfélcsoportjainak hálója ([Bul92]);
- ha $|A| \geqslant 4$, akkor véges hálók tetszőleges megszámlálható sok elemet tartalmazó rendszerének direkt szorzata beágyazható $\mathbb{CL}_A$-ba ([Bul94]).

Mindezek után lássuk, hogy hogyan segíthet a monadikus intervallumok vizsgálata a klónháló szerkezetének megértésében.

Legyen A tetszőleges halmaz. Ekkor bármely $\mathcal{C} \in \mathbb{CL}_A$ klón esetén a klónbeli egyváltozós műveletek halmaza transzformációmonoidot alkot az A halmazon. Valamint, az is egyszerűen látható, hogy adott M transzformációmonoidra azon klónok összessége, amelyek egyváltozós műveleteinek halmaza éppen M a $\mathbb{CL}_A$ klónháló egy $\mathrm{Int}(M)$ intervallumát alkotják (ld. Á. Szendrei [Sze86]). A klónháló azon intervallumait, amelyek a fenti módon keletkeznek **monadikus intervallumoknak** nevezzük. Az $\mathrm{Int}(M)$ intervallum legkisebb eleme $\langle M \rangle$ (az M által generált lényegében egyváltozós műveletek halmaza), a legnagyobb eleme pedig

$$\mathrm{Sta}(M) = \big\{ f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{O}_A \mid n \in \mathbb{N},\ \text{and} \\ f(m_1(x), \ldots, m_n(x)) \in M \text{ for all } m_1, \ldots, m_n \in M \big\},$$

az M monoid **stabilizátora**. Az M monoidot **összeejtő monoidnak** nevezzük, ha az $\mathrm{Int}(M)$ intervallum egyetlen elemet tartalmaz, azaz $\mathrm{Sta}(M) = \langle M \rangle$.

Mivel véges A halmazon véges sok transzformációmonoid van, így a hozzájuk tartozó monadikus intervallumok egy olyan partícióját adják a $\mathbb{CL}_A$ klónhálónak, amelynek véges sok blokkja van. Mivel $|A| \geqslant 3$ esetén a $\mathbb{CL}_A$ klónháló számossága $2^{\aleph_0}$, ezért azt várhatjuk, hogy monadikus intervallumaink „nagy részének" számossága szintén ennyi lesz. E várakozást támasztja alá, hogy ha $|A| = 3$, akkor a transzformációmonoidok több, mint feléhez $2^{\aleph_0}$ számosságú monadikus intervallum tartozik (vö. [Dor]). Mindenesetre, az eddig elért eredmények azt mutatják, hogy sok olyan transzformációmonoid van, amelyhez megszámlálható monadikus intervallum tartozik. A monadikus intervallumok vizsgálata által a klónháló szerkeztének alaposabb feltárását remélhetjük.

A monadikus intervallumokkal kapcsolatban érdemes megemlíteni a következő, a klónháló kongruenciáihoz kötődő problémát: Ha A legalább 3-elemű véges halmaz, akkor van-e a $\mathbb{CL}_A$ klónhálónak nemtriviális kongruenciája? A kapcsolatot A. A. Krokhin [Kro01b] azon eredménye teremti meg, amely szerint $\mathbb{CL}_A$ minden nemtriviális kongruenciája részrelációja annak az ekvivalenciarelációnak, amelynek blokkjai a monadikus intervallumok. Kételemű A halmaz esetén a $\mathbb{CL}_A$ háló kongruenciáit A. A. Krokhin és A. P. Semigrodskikh határozták meg [KS01]-ben, a klónháló Post-féle leírásának felhasználásával.

Szendrei Á. vetette fel [Sze86]-ban a monadikus intervallumok számosságuk szerinti osztályozásának problémáját. Post leírásának segítségével egyszerűen meghatározhatjuk $\mathbb{CL}_{\{0,1\}}$ monadikus intervallumainak számosságát: hat darab monadikus intervallum van, amelyek közül pontosan három darab véges. Ha az A halmaznak legalább három eleme van, akkor egyrészt a $\mathbb{CL}_A$ klónháló számossága $2^{\aleph_0}$, másrészt a Rosenberg–Sauer [RS]-beli eredménye szerint bármely monadikus intervallum számossága $2^{\aleph_0}$ vagy megszámlálható (ld. még M. Pinsker [Pin08]). Ezért a Szendrei-probléma a következőképpen finomítható: melyek azok a transzformációmonoidok, amelyekhez tartozó monadikus intervallum számossága

- 1,
- véges, de 1-nél nagyobb,
- $\aleph_0$,
- $2^{\aleph_0}$?

Doktori értekezésem a [Dor02], [Dor07] és [Dor08] publikációk eredményeinek felhasználásával készült. Célunk a monadikus intervallumok vizsgálata véges halmazokon. Legfontosabb eredményeink összeejtő monoidokkal kapcsolatosak. [Dor02]-ben megmutatjuk, hogy a teljes transzformáció-félcsoport részmonoid hálójában vannak olyan „nagy" elemszámú intervallumok, amelyek csak összeejtő monoidokat tartalmaznak, valamint tetszőleges 3-elemű halmazon meghatározzuk az összes összeejtő monoidot. [Dor07]-ben azokat az összeejtő (inverz) monoidokat írjuk le, amelyek a T. Saito és M. Katsura által [SK92]-ben leírt konstrukcióval kaphatók meg valamely véges hálóból. Továbbá, monoidok egy olyan családját is leírjuk, amelyekhez $2^{\aleph_0}$ számosságú monadikus intervallum tartozik. Végül, [Dor08]-ben általánosítjuk Pálfy P. P. [Pal84]-ben található tételét: teljes leírást adunk mindazon összeejtő monoidokra, amelyek legalább egy darab egyváltozós konstans műveletet tartalmaznak és minden konstanstól különböző műveletük permutáció. Valamint, olyan monoidokat is mutatunk, amelyekhez kételemű monadikus intervallum tartozik.

2. Összeejtő monoidok nagy intervallumai

A címben foglaltaknak megfelelően, megmutatjuk, hogy legalább hatelemű alaphalmaz esetén a teljes transzformáció-félcsoport részmonoid hálójában olyan „nagy” elemszámú intervallumok is vannak, amelyek elemei mind összeejtő monoidok. Az alábbiakban azt a konstrukciót ismertetjük, amelynek segítségével, legalább négyelemű alaphalmazon, ezeket az összeejtő monoidokat megkaphatjuk.

Legyen A legalább négyelemű véges halmaz, és legyenek P, Q és R olyan páronként diszjunkt részhalmazai A-nak, amelyekre $|R| \geqslant 2$ teljesül. Legyen $T(P, Q, R)$ mindazon $t \in T(A)$ transzformációk halmaza az A halmazon, amelyekre igaz, hogy tetszőleges $p \in P, q \in Q$ és $r, r' \in R$ estén, ha $t(r) = t(r')$, akkor $t(p) \in \{t(q), t(r)\}$. Azt mondjuk, hogy az $M \subseteq T(A)$ transzformáció-monoid **gazdag** a P, Q, R halmazokra vonatkozóan, ha van olyan $s \in A$ elem, amelyre minden az $a \neq b$ és $s \in \{a, b\}$ összefüggéseknek eleget tevő $a, b \in A$ esetén M tartalmaz olyan m és n transzformációkat, amelyekre $m(P) = m(Q) = \{a\}$, $m(R) = \{b\}$ és $n(P) = n(R) = \{a\}$, $n(Q) = \{b\}$ teljesül.

A következő tétel mutatja, hogy miért is fontosak a gazdag monoidok.

1. Tétel ([Dor02])**.** *Legyen A legalább négyelemű véges halmaz, továbbá legyenek P, Q, R páronként diszjunkt részhalmazai A-nak úgy, hogy $|R| \geqslant 2$ teljesüljön. Ekkor minden olyan M gazdag monoid, amely részhalmaza $T(P, Q, R)$-nek összeejtő.*

Ezen tétel képezi alapját annak a konstrukciónak, amely lehetővé teszi, hogy „nagy” csak összeejtő monoidokat tartalmazó intervallumokat találjunk a teljes transzformáció-félcsoport részmonoid hálójában.

Legyen A legalább hatelemű véges halmaz, legyenek $p, q, r, r' \in A$ páronként különböző elemek, valamint legyen $P = \{p\}$, $Q = \{q\}$, $R = \{r, r'\}$ és $A' = A \setminus (P \cup Q \cup R)$. Az N monoidot az A halmazon definiáljuk a következőképpen. Legyen N az a monoid, amelyet mindazon $T(P, Q, R)$-beli t transzformációk generálnak, amelyekre teljesül, hogy $t(r) = t(r')$ és t-nek az A' halmazra való megszorítása éppen A' identikus transzformációja. Egyszerűen igazolható, hogy N része $T(P, Q, R)$-nek. Tetszőleges $K \subseteq T(A')$ transzformációmonoidra $\hat{K}$ jelölje azt a monoidot, amely mindazon $T(A)$-beli transzformációkból áll, amelyek A'-re való megszorítása eleme K-nak, és amelyek $(P \cup Q \cup R)$-re való megszorítása a megfelelő identikus transzformáció. Mivel $t \in \langle N \cup \hat{K} \rangle$ esetén $t|_{A'} \in K$, ezért a $T(A')$ transzformáció-félcsoport tetszőleges K_1, K_2 részmonoidjára, ha $K_1 \neq K_2$, akkor $\langle N \cup \hat{K}_1 \rangle \neq \langle N \cup \hat{K}_2 \rangle$. Továbbá, az is teljesül, hogy $\langle N \cup \widehat{T(A')} \rangle \subseteq T(P, Q, R)$, és az N monoid gazdag.

Felhasználva, hogy a $T(A)$ transzformáció-félcsoport részmonoid hálójának számossága nagyobb, mint $2^{2^{c|A|}}$, ahol c valamely alkalmas pozitív konstans, és az 1. Tételt, az alábbi állítást kapjuk.

2. Tétel ([Dor02]). *Legyen A legalább hatelemű véges halmaz. Ekkor valamennyi az $[N, \langle N \cup \widehat{T(A')} \rangle]$ intervallumba eső monoid összeejtő, és ezen intervallum elemszáma nagyobb, mint $2^{2^{c'n}}$, ahol c' alkalmas pozitív konstans.*

Háromelemű halmazon a fentiekben vázolt konstrukció nem alkalmazható, de egy hozzá hasonló módszer már ebben az esetben is működik.

Legyen A háromelemű halmaz, $p, s \in A$. Jelölje T_p mindazon $t \in T(A)$ transzformációk halmazát, amelyekre teljesülnek a következők: t permutáció, amelynek p fixpontja vagy $t(p) \in \{t(q), t(r)\}$, ahol $\{p, q, r\} = A$. Továbbá, álljon $M_{p,s}$ azokból a T_p-beli transzformációkból, amelyekre $t(A) \subseteq \{s, a\}$ valamely $a \in A \setminus \{s\}$ vagy t az A halmaz identikus művelete. Könnyen igazolható, hogy teljes transzformáció-félcsoport T_p és $M_{p,s}$ részhalmazai monoidok az A halmazon.

Ezen monoidok segítségével az 1. Tételben foglaltakhoz hasonló leírást adhatunk bizonyos összeejtő monoidokra.

3. Tétel ([Dor02]). *Legyen A háromelemű halmaz. Ekkor minden olyan $M \subseteq T(A)$ transformációmonoid összeejtő, amelyre vannak olyan $p, s \in A$ elemek, hogy M-re $M_{p,s} \subseteq M \subseteq T_p$ teljesül.*

Definiáljuk a $\bowtie$ relációt a $T(A)$ halmazon a következőképpen: az M_1 és M_2 transzformációmonoidok az A halmazon pontosan akkor legyenek $\bowtie$ relációban, ha van olyan $\pi \in S(A)$ permutáció, amelyre $M_2 = \{\pi^{-1} m \pi : m \in M_1\}$ teljesül. Ekkor a $\bowtie$ reláció ekvivalenciareláció, és azok a monadikus intervallumok, amelyek $\bowtie$ relációban álló monoidokhoz tartoznak izomorfak. Tetszőleges háromelemű halmazon 699 darab transzformációmonoid van 160 $\bowtie$-osztályban. Ezen rész utolsó tétele az összeejtő monoidok leírását adja meg az $A = \{0, 1, 2\}$ halmazon.

4. Tétel ([Dor02]). *Az $A = \{0, 1, 2\}$ halmazon 30 darab összeejtő monoid van 11 $\bowtie$-osztályban. Ha az $M \subseteq T(A)$ monoid összeejtő, akkor M $\bowtie$ relációban áll az alábbi monoidok közül pontosan eggyel:*

(1) $\langle c_0, \tau_2 \rangle = \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1, \tau_2\}$,

(2) $\langle c_0, c_1, c_2 \rangle = \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1, c_2\}$,

(3) $\langle c_0, c_2, \tau_2 \rangle = \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1, c_2, \tau_0\}$,

(4) $\langle c_0, \sigma \rangle = \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1, c_2, \sigma, \sigma^2\}$,

(5) S_3,

(6) $M_{2,0}$,

(7) $M_{2,2}$,

(8) $\langle M_{2,2} \cup \{\tau_2\} \rangle = M_{2,2} \cup \{\tau_2\}$,

(9) $T_2 \setminus \{\tau_2\}$,

(10) T_2.

3. Összeejtő inverz monoidok

Az ezen részben foglaltakat azon permutációcsoportokra vonatkozó eredmények készítették elő, amelyek szerint a „nagy” permutációcsoportok (pl. a primitív permutációcsoportok) összeejtőek. (vö. Pálfy–Szendrei [PSz82] és Kearnes–Szendrei [KSz01]). Így permutációcsoportok után természetesnek tűnt a vizsgálatokat „nagy” (= maximális) inverz monoidokra is kiterjeszteni.

Eredményeink ismertetéséhez szükségünk lesz az alábbi jelölésekre, definíciókra és fogalmakra.

Legyen $\mathbb{L} = (L; \vee, \wedge)$ véges háló, amelynek legkisebb, illetve legnagyobb elemét jelölje 0, illetve 1. Az $\mathbb{L}$ háló atomjainak, illetve egyesítés irreducibilis elemeinek halmazát jelölje $\mathcal{A}(\mathbb{L})$, illetve $\mathcal{J}(\mathbb{L})$, és legyen $\mathcal{A}_0(\mathbb{L}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \cup \{0\}$. Ha nem áll fenn a félreértésnek a veszélye, akkor a fentiek helyett egyszerűen csak az $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ és $\mathcal{J}$ jelöléseket használjuk. Az $\mathbb{L}$ háló a és b elemeit **hasonlónak** nevezzük, ha az általuk generált $(a]$ és $(b]$ főideálok izomorfak. Az a és b elemek hasonlóságát $a \sim b$-vel jelöljük. A hasonlóság ekvivalenciareláció az L halmazon. Ha az a elemet tartalmazó $\sim$-osztály egyetlen elemet tartalmaz, akkor azt mondjuk, hogy az a elem **izolált**. Tetszőleges $a \in L$ esetén a φ_a egyváltozós műveletet a $\varphi_a(x) = x \wedge a$ $(x \in L)$ szabállyal definiáljuk. Például, φ_0 a konstans 0 művelet az L halmazon. Ha az a és b elemek $(a, b \in L)$ hasonlóak, akkor $\beta_{a,b}$ egy $(a]$ és $(b]$ közötti izomorfizmust fog jelölni. Legyen $\mathrm{IS}(\mathbb{L})$ az alábbi részhalmaza $T(L)$-nek:

$$\mathrm{IS}(\mathbb{L}) = \{\beta_{v,w} \circ \varphi_v \mid v, w \in L,\ v \sim w \text{ és } \beta_{v,w} \colon (v] \to (w] \text{ izomorfizmus}\}.$$

Az $\mathrm{IS}(\mathbb{L})$ részhalmaz a teljes transzformáció-félcsoport egy inverz részmonoidja az L halmazon (vö. Saito–Katsura [SK92], Lemma 3.1).

Tekintsük az L halmaz a és b elemeit. Azt mondjuk, hogy az a elem **erősen nagyobb**, mint b, ha valahányszor a $b' \in L$ elemre $b' \sim b$ teljesül, mindannyiszor $b' \leqslant a$. Azt, hogy az a elem erősen nagyobb, mint b az $b \ll a$ szimbólummal jelöljük. Most már meg tudjuk fogalmazni ezen rész legfontosabb eredményét.

5. Tétel ([Dor07]). *Legyen $\mathbb{L}$ véges háló, amelynek legalább három eleme van. Ekkor az $M = \mathrm{IS}(\mathbb{L})$ inverz monoid pontosan akkor összeejtő, ha nincs olyan $\mathcal{J} \setminus \mathcal{A}$-beli elem, amely erősen nagyobb lenne, mint $L \setminus \{0\}$ valamely eleme.*

Ha az $\mathbb{L}$ háló atomisztikus, akkor $\mathcal{J} = \mathcal{A}$, és így az előző tétel feltételei nyilván teljesülnek.

6. Következmény. *Ha az $\mathbb{L}$ háló atomisztikus, akkor $\mathrm{IS}(\mathbb{L})$ összeejtő.*

Miután leírtuk azokat a hálókat, amelyekre $\mathrm{IS}(\mathbb{L})$ összeejtő, figyelmünket a „nagy” monadikus intervallumok felé fordítjuk. Ezen részt azzal zárjuk, hogy $\mathbb{L}$ hálók egy olyan családját adjuk meg, amelyekre az $\mathrm{IS}(\mathbb{L})$ monoidhoz $2^{\aleph_0}$ számosságú monadikus intervallum tartozik. Az L-beli $u \leqslant v$ elemek esetén az $\{x \in L \mid u \leqslant x \leqslant v\}$ intervallumot $[u, v]$-vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{L}$ háló **megosztott**, ha van olyan $b \in L \setminus \{0, 1\}$ elem, amelyre $L = [0, b] \cup [b, 1]$ teljesül.

7. Tétel ([Dor07]). *Legyen $\mathbb{L}$ megosztott háló, és legyen $b \in L \setminus \{0, 1\}$ olyan elem, amelyre $L = [0, b] \cup [b, 1]$ teljesül. Ekkor* $|\mathrm{Int}(\mathrm{IS}([0, b]))| \leqslant |\mathrm{Int}(\mathrm{IS}(\mathbb{L}))|$.

A legegyszerűbb megosztott hálók a legalább háromelemű láncok.

8. Tétel ([Dor07]). *Ha $\mathbb{L}$ háromelemű lánc, akkor* $|\mathrm{Int}(\mathrm{IS}(\mathbb{L}))| = 2^{\aleph_0}$.

9. Következmény. *Ha az $\mathbb{L}$ legalább háromelemű véges lánc, akkor az* $\mathrm{Int}(\mathrm{IS}(\mathbb{L}))$ *monadikus intervallum számossága* $2^{\aleph_0}$.

Végül, E. L. Postnak a $\mathbb{CL}_{\{0,1\}}$ háló leírására vonatkozó eredményeiből a 7. Tétel alkalmazásával a következőt kapjuk.

10. Következmény. *Ha az $\mathbb{L}$ véges háló egyetlen atomot tartalmaz, akkor az* $\mathrm{Int}(\mathrm{IS}(\mathbb{L}))$ *monadikus intervallum végtelen.*

4. Konstansokból és permutációkból álló összeejtő monoidok

Az alábbi eredmények kiindulópontjául Pálfy P. P. jól ismert tétele szolgál. Pálfy tétele [Pal84]-ben véges halmazokra a következőt állítja.

Tétel (cf. P. P. Pálfy [Pal84])**.** *Legyen A véges halmaz, amelynek legalább három elem van, és legyen M olyan transzformációmonoid az A halmazon, amely az összes egyváltozós konstans műveletet tartalmazza és minden nemkonstans művelete permutáció. Ekkor $|\mathrm{Int}(M)| \leqslant 2$; pontosabban, $|\mathrm{Int}(M)| = 2$ pontosan akkor teljesül, ha M megegyezik valamely véges vektortér egyváltozós polinom függvényeinek monoidjával.*

A következőkben csak olyan $M \subseteq C(A) \cup S(A)$ monoidokra szorítkozunk, amelyek legalább egy, de nem az összes egyváltozós konstans műveletet tartalmazzák. Az eredmények formába öntéséhez azonban további jelölésekre lesz szükségünk.

Legyen V mindazon $v \in A$ elemek halmaza, amelyekre $c_v \in M$, és legyen $W = A \setminus V$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\emptyset \subsetneq V, W \subsetneq A$. Legyen P az M-beli permutációk halmaza. Az a tény, hogy A véges M zárt a műveletek kompozíciójára biztosítja, hogy P permutációcsoport az A halmazon, és

$$\alpha(V) = V, \qquad \alpha(W) = W$$

teljesül tetszőleges $\alpha \in P$-re. Ezen egyenlőségek lehetővé teszik, hogy a P-beli permutációkat megszorítsuk a V és W halmazokra, így a következő permutációcsoportokat kapjuk:

$$P_V = \{\alpha|_V \mid \alpha \in P\} \subseteq S(V),$$
$$P_W = \{\alpha|_W \mid \alpha \in P\} \subseteq S(W).$$

Továbbá, jelölje $\mathfrak{i}_V$ a $P \to P|_V$, $\alpha \mapsto \alpha|_V$ leképezést. Ha az $\mathfrak{i}_V$ leképezés injektív, akkor minden $m \in M$ transzformáció esetén az $m|_V$ leképezés egyetlen módon terjeszthető ki A-ra úgy, hogy M-beli leképezést kapjunk. Ezért, ha az i_V leképezés injektív, akkor a

$$\mathrm{j}\colon P_V \to P_W,\ \alpha|_V \mapsto \alpha|_W.$$

leképezés jól definiált.

Első tételünk az összeejtő monoidokat karakterizálja mindazon transzformációmonoidok között, amelyek permutációkból és legalább egy egyváltozós kontans műveletből állnak. Ezen tétel egyben az A. Fearnley és I. Rosenberg [FR03]-ban kapott egyik eredményének is a kiterjesztése.

11. Tétel ([Dor08])**.** *Legyen A legalább kételemű véges halmaz, és legyen M olyan transzformációmonoid az A halmazon, amely legalább egy egyváltozós konstans műveletből és permutációkból áll. Ekkor M pontosan akkor összeejtő, ha*

(i) $|V| \geqslant 2$,

(ii) P_W *transitív,*

(iii) i_V *injektív, és*

(iv) *az alábbi feltételek közül legalább egy teljesül:*

  (a) *az $M|_V = \{m|_V : m \in M\}$ monoid összeejtő,*

  (b) *a* j *leképezés nem injektív,*

  (c) *a P_W permutációcsoport nem reguláris.*

A 11. Tétel következményeként azonnal adódik, hogy olyan $M \subseteq C(A) \cup S(A)$ monoid, amely pontosan egy egyváltozós konstans műveletet tartalmaz nem lehet összeejtő. A következő tétel ennél egy kicsit többet állít.

12. Tétel ([Dor08])**.** *Legyen $M \subseteq C(A) \cup S(A)$ olyan monoid, amely pontosan egy egyváltozós kontans műveletet tartalmaz. Ekkor az* $\mathrm{Int}(M)$ *monadikus intervallum végtelen.*

13. Tétel ([Dor08])**.** *Legyen A olyan véges halmaz, amely legalább két elemet, és legyen $M \subseteq C(A) \cup S(A)$ olyan transzformációmonoid, amely legalább két egyváltozós konstans műveletet tartalmaz. Ha a 11. Tétel* (i)–(iii) *feltételei teljesülnek, de a* (iv) *feltétel nem, akkor* $\mathrm{Int}(M)$ *izomorf* $\mathrm{Int}(M|_V)$*-vel. Így,*

- *ha $|V| = 2$ és $M|_V$ megegyezik az $\{\mathrm{id}_V, c_0|_V, c_1|_V\}$ monoiddal, akkor $|W| = 1$, $M = \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1\}$, and* $\mathrm{Int}(M)$ *izomorf a kételemű lánc direkt négyzetével;*

- *ha* $|V| = 2$ *és* $M|_V$ *a teljes transzformáció-félcsoport* V*-n, akkor* $|W| = 2$*,* $M = \{\mathrm{id}_A, c_0, c_1, (0\,1)(2\,3)\}$*, és* $\mathrm{Int}(M)$ *egy háromelemű lánc;*
- *ha* $|V| \geqslant 3$*, akkor* $\mathrm{Int}(M)$ *egy kételemű lánc.*

Irodalomjegyzék

[Bul92] **Bulatov, A. A.**, *Identities in the lattices of closed classes*, Diskr. Mat., 4 (4), 1992. (Russian)

[Bul94] **Bulatov, A. A.**, *Finite sublattices of the lattices of clones*, Algebra i Logika, 33 (5), 1994. (Russian)

[BKSS93] **Bulatov, A., Krokhin, A., Safin, K.,** and **Sukhanov, E.**, *On the structure of clone lattices.*, General algebra and discrete mathematics (Potsdam, 1993), 27–34, Res. Exp. Math., 21, Heldermann, Lemgo, 1995.

[BKSSS01] **Bulatov, A., Krokhin, A., Safin, K., Semigrodskikh, A.,** and **Sukhanov, E.**, *On the structure of clone lattices II.*, Multiple-Valued Logic, **7** (2001), no. 5-6, 379–389.

[Bur67] **Burle, G. A.**, *Classes of k-valued logic which contain all functions of a single variable*, Diskretnyi Analiz, **10** (1967), 3–7.

[BS81] **Burris, S.** and **Sankappanavar, H. P.**, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1981).

[BSCs88] **Burris, S.** and **Sankappanavar, H. P.**, *Bevezetés az univerzális algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest (1988).

[Coh81] **Cohn, P. M.**, *Universal Algebra*, Reidel Publ. Co., Dordrecht–Boston–London (1981).

[DP02] **Davey, B. A.** and **Priestley, H. A.**, *Introduction to lattices and Order*, Cambridge University Press (2002).

[DH79] **Demetrovics, J.** and **Hannák, L.**, *On the cardinality of self-dual closed classes in k-valued logics*, Közl.-MTA Számítástech. Automat. Kutató Int. Budapest, **23** (1979), 7–18.

[DH97] **Demetrovics, J.** and **Hannák, L.**, *Construction of large sets of clones*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. **33**, S. 127–133 (1997).

[Dor02] **Dormán, M.**, *Intervals of collapsing monoids*, Acta Sci. Math. (Szeged) **68** (2002), no. 3-4, 561–569.

[Dor07] **Dormán, M.**, *Collapsing inverse monoids*, Algebra Universalis, **56** (2007), 241–261.

[Dor08] **Dormán, M.**, *Collapsing monoids consisting of permutations and constants*, Algebra Universalis, **58** (2008), 479–492.

[Dor] **Dormán, M.**, *Monoidal intervals on three-element sets*, unpublished.

[FR03] **Fearnley, A.** and **Rosenberg, I. G.**, *Collapsing monoids containing permutations and constants*, Algebra Universalis, **50** (2003), 149–156.

[Gra97] **Grabowski, J.-U.**, *Binary operations suffice to test collapsing of monoidal intervals*, Algebra Universalis, **38** (1997), 92–95.

[Hal58] **Hall, P.**, *Some word problems*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 482–496.

[IP93] **Ihringer, T.** and **Pöchel, R.**, *Collapsing clones*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **38** (1993), 99–113.

[JM59] **Janov, Ju. I.** and **Mučnik, A. A.**, *Existence of k-valued closed classes without a finite basis*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **127** (1959), 44–46. (Russian)

[KSz01] **Kearnes, A. K.** and **Szendrei, Á.**, *Collapsing permutation groups*, Algebra Universalis, **45** (2001), 35–51.

[Kro95] **Krokhin, A. A.**, *Monoidal intervals in lattices of clones*, Algebra and Logic, **34** (1995), 155–168.

[Kro96] **Krokhin, A. A.**, *Monoidal and distributive intervals in clone lattices*, Algebra (Krasnoyarsk, 1993), 153–159, de Gruyter, Berlin, 1996.

[Kro97a] **Krokhin, A. A.**, *Boolean lattices as intervals in clone lattices*, Multiple-Valued Logic, **2**(3) (1997), 263–271.

[Kro97b] **Krokhin, A. A.**, *On clones, transformation monoids, and associative rings*, Algebra Universalis, **37** (1997), 527–540.

[Kro99] **Krokhin, A. A.**, *Maximal clones in monoidal intervals I*, Siberian Mathematical Journal, Vol. 40, No. 3 (1999), 528–538.

[Kro01a] **Krokhin, A. A.**, *On clones, transformations, and finite Boolean algebras*, Algebra Universalis, **46** (2001), 231–236.

[Kro01b] **Krokhin, A. A.**, *Congruences of clone lattices. II.*, Order, **18** (2001), no. 2, 151–159.

[KL02] **Krokhin A. A.** and **Larose B.**, *A monoidal interval of isotone clones on a finite chain*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **68**, no. 1-2, (2002), 37–62.

[KS01] **Krokhin A. A.** and **Schweigert D.**, *On clones preserving a reflexive binary relation*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **67**, no. 3-4, (2001), 461–473.

[KS01] **Krokhin, A. A.** and **Semigrodskikh, A. P.**, *Congruences of clone lattices. I.*, Contribution to general algebra, 11 (Olomouc/Velké Karlovice, 1998), 137–144, Heyn, Kalgenfurt, 1999.

[Lau84] **Lau, D.**, *Unterhalbgruppen von* $(P_3^1, *)$, Rostock. Math. Kolloq. **26** (1984), 55–62.

[Lau95] **Lau, D.**, *Unterhalbgruppen von* $(P_3^1, *)$, preprint (1995)

[MMT87] **McKenzie, R. N., McNulty, G. F.** and **Taylor, W. F.**, *Algebras, lattices, varieties (Vol. I)*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, California (1987)

[Mar82] **Marčenkov, S. S.**, *The classification of algebras with alternating automorphism group*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **265** (1982), 533–536. (Russian)

[Pal84] **Pálfy, P. P.**, *Unary polynomials in algebras I*, Algebra Universalis, **18** (1984), 262–273.

[PSz82] **Pálfy, P. P.** and **Szendrei, Á.**, *Unary polynomials in algebras II*, Contribution to general algebra 2, Proceedings of the Klagenfurt Conference, June 10–13, 1982.

[Pin08] **Pinsker, M.**, *Monoidal intervals of clones on infinite sets*, Discrete Math. **308** (2008), 59–70.

[Pos41] **Post, E. L.**, *The two-valued iterative systems of mathematical logic*, Ann. Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., **5** (1941).

[PK79] **Pöschel, R.** and **Kalužnin, L. A.**, *Funktionen und Relationenalgebren*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1979).

[RS] **Rosenberg, I. G.** and **Sauer, N.**, *Interval cardinality in the lattice of clones*, unpublished.

[SK92] **Saito, T.** and **Katsura, M.**, *Maximal inverse subsemigroups of the full transformation semigroup*, Semigroups with applications, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, Oberwolfach (1992), 101–113.

[Sze86] **Szabó, L.** and **Szendrei, Á.**, *Słupecki-type criteria for quasilinear functions over a finite dimensional vector space*, Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik, **17** (1981), 601–611.

[Sze86] **Szendrei, Á.**, *Clones in universal algebra*, Séminare de mathématiques supérieures vol. 99, Les presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1986.

[Sze94] **Szendrei, Á.**, *Term minimal algebras*, Algebra Universalis, **32** (1994), 439–477.