

**Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Tanszékcsoport**

**Geometriai tulajdonságok alkalmazása a
bináris tomográfiában:
Egyértelműségi és rekonstrukciós
eredmények**

PhD-értekezés tézisei

Balázs Péter

Témavezetők:

Dr. Csirik János

Dr. Kuba Attila

**Szeged
2007**

Bevezetés

A *komputer tomográfia* (CT) egy olyan diagnosztikai eljárás, mellyel az emberi szervezeten belül meghatározható a sűrűségi eloszlás Röntgen-vetületek segítségével, így lehetőség nyílik bizonyos szövetek elváltozásainak megállapítására. Az elmúlt évtizedekben a CT az orvosi képfeldolgozás területén túlnőtt; ipari, biológiai, fizikai és kémiai alkalmazások is megjelentek. A legtöbb új alkalmazásban a vizsgált objektumban csak néhány sűrűségi érték lehetséges fel, ugyanakkor gyakorlati okokból csak kevés vetület készíthető. Ezzel szemben az orvosi képalkotásban a sűrűségi értékek széles skálán változhatnak, viszont akár több száz vetület is rendelkezésre áll. Mivel az új alkalmazásokban az elérhető vetületek száma kevés, a klasszikus CT eljárások nem hoznak sok sikert.

A *diszkrét tomográfia* (DT) [14; 15] azt vizsgálja, hogyan rekonstruálható egy objektum előzetes információ felhasználásával. Az új alkalmazásoknál ugyanis kihasználható, hogy a rekonstrukció csak néhány értéket tartalmazhat, így csökkenthetők vagy akár kiküszöbölhetők azok a problémák, melyek a rendelkezésre álló vetületek alacsony számából adódnak. Egy még inkább korlátozott, de szintén gyakori eset az, amikor a sűrűségi értékek a $\{0, 1\}$ halmazból kerülnek ki. Például elektronmikroszkópos vizsgálatoknál a 0 és 1 rendre jelölheti egy adott atom jelenlétét vagy hiányát egy kristályrácsban. Hasonlóan, angiográfiás felvételeknél 0 és 1 értékek írhatják le a kontrasztanyag hiányát vagy jelenlétét egy szívkamrában vagy az érhálózat egy adott részén.

Jelen disszertáció ez utóbbi, *bináris tomográfia* (BT) nevezett területtel foglalkozik. A BT-ban a legnagyobb kihívás az, hogy gyakorlati okokból az elérhető vetületek száma legfeljebb kb. 10 (általában sokkal kevesebb), ami bizonytalan rekonstrukciót eredményez, azaz ugyanannak a rekonstrukciós feladatnak rengeteg lehetséges megoldása adódhat. Ennek következtében előfordulhat, hogy a rekonstruált kép jelentősen eltér az eredetitől. Ráadásul a vetületek számától és irányától függően a rekonstrukciós probléma NP-nehéz is lehet. Ezek a problémák kiküszöbölhetők metaheurisztikák (szimulált hűtés, genetikus algoritmusok, stb.) alkalmazásával, amennyiben kielégítő, de nem feltétlenül pontos megoldást keresünk. A másik gyakran alkalmazott stratégia azzal a feltételezéssel él, hogy a rekonstruálandó halmaz bizonyos geometriai tulajdonságokkal rendelkezik. Ezáltal csökkenthető a lehetséges megoldások tere, és így gyorsan juthatunk kevésbé bizonytalan megoldáshoz. Ez a tézis a Szerző azon eredményeit foglalja össze, melyeket a geometriai információt alkalmazó rekonstrukciós algoritmusok vizsgálata során kapott.

Bináris tomográfia: Definíciók és alapproblémák

A kétdimenziós (2D) \mathbb{Z}^2 egészrács véges részhalmazait *diszkrét halmazoknak* nevezzük. A diszkrét halmaz *méretén* mindig annak legkisebb befoglaló téglalapjának méretét értjük. Egy $m \times n$ méretű F diszkrét halmaz eltolás erejéig meghatározott, és egységnyi cellák alkotta bináris képpel vagy egy $\hat{F} = (\hat{f}_{ij})_{m \times n}$ bináris mátrixszal reprezentálható. Annak érdekében, hogy a mátrix reprezentációval összhangban legyünk, feltételezzük, hogy a \mathbb{Z}^2 rács függőleges tengelye fentről lefelé irányított, valamint, hogy F legkisebb befoglaló téglalapjának a bal felső sarka az $(1, 1)$ pontban van. Hasonló okokból a diszkrét halmaz bármely elemére annak mátrix pozíciójával hivatkozunk (tehát nem a 2D egészrácsra lévő pozíciójával).

Egy v *rácsirány* egy $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ nem zéró vektorral adható meg, ahol a és b relatív prímek. Egy v irányú *rács egyenes* az \mathbb{E}^2 euklideszi tér egy olyan egyenese, amely párhuzamos v -vel és \mathbb{Z}^2 legalább

egy pontján áthalad. Jelöljük a v irányú rácsegyenesek halmazát $\mathcal{L}^{(v)}$ -vel. Akkor az F diszkrét halmaz v irányban vett vetülete a $\mathcal{P}_F^{(v)} : \mathcal{L}^{(v)} \rightarrow \mathbb{N}_0$ függvénnyel definiálható, ahol $\mathcal{P}_F^{(v)}(\ell) = |F \cap \ell|$ minden $\ell \in \mathcal{L}^{(v)}$ -re. Egy diszkrét halmaz vetületei a minimális befoglaló téglalapon kívül 0 értékűek, így ez a vetületi rész a továbbiakban nem lesz érdekes.

Ha adott diszkrét halmazok egy \mathcal{G} osztálya, akkor azt mondjuk, hogy $G \in \mathcal{G}$ egyértelmű a \mathcal{G} osztályban (adott vetületekre való tekintettel), ha nincs G -től különböző $G' \in \mathcal{G}$ halmaz ugyanazokkal a vetületekkel. A diszkrét tomográfia három alapvető problémával foglalkozik. Egy adott \mathcal{G} halmazosztály és egy tetszőleges $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_q)$ q darab rácsirányt tartalmazó halmaz esetén ezek az alábbi módon fogalmazhatók meg.

KONZISZTENCIA(\mathcal{G}, \mathcal{L})

Példány: Adott $k = 1, \dots, q$ -ra egy $p^{(k)} : \mathcal{L}^{(v_k)} \rightarrow \mathbb{N}_0$ függvény.

Feladat: Döntsük el, hogy létezik-e $F \in \mathcal{G}$ úgy, hogy $\mathcal{P}_F^{(v_k)} = p^{(k)}$ $k = 1, \dots, q$ -ra.

REKONSTRUKCIÓ(\mathcal{G}, \mathcal{L})

Példány: Adott $k = 1, \dots, q$ -ra egy $p^{(k)} : \mathcal{L}^{(v_k)} \rightarrow \mathbb{N}_0$ függvény.

Feladat: Konstruáljunk egy $F \in \mathcal{G}$ diszkrét halmazt úgy, hogy $\mathcal{P}_F^{(v_k)} = p^{(k)}$ $k = 1, \dots, q$ -ra.

EGYÉRTELMŰSÉG(\mathcal{G}, \mathcal{L})

Példány: Egy $F \in \mathcal{G}$.

Feladat: Döntsük el, hogy F egyértelmű-e a \mathcal{G} osztályban az \mathcal{L} -beli irányokban vett vetületeire való tekintettel.

Ebben a tézisben két speciális irányhalmazt használunk, melyek $\mathcal{L}_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ és $\mathcal{L}_4 = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (-1, 1)\}$. Az egyszerűség érdekében bevezetjük a $\mathcal{H}(F) = (h_1, \dots, h_m)$, $\mathcal{V}(F) = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{D}(F) = (d_1, \dots, d_{m+n+1})$ és $\mathcal{A}(F) = (a_1, \dots, a_{m+n-1})$ jelöléseket, rendre az F diszkrét halmaz $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, és $(-1, 1)$ irányból vett vetületeinek leírására. Ezekre úgy fogunk hivatkozni, mint az adott halmaz *horizontális*, *vertikális*, *diagonális* és *antidiagonális* vetületeire. Használni fogjuk egy diszkrét halmaz *kumulált vektorait* is. Ezek a $\tilde{H} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_m)$, $\tilde{V} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$, $\tilde{D} = (\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{m+n-1})$ és $\tilde{A} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{m+n-1})$, vektorokkal adhatók meg és a $\tilde{h}_i = \sum_{l=1}^i h_l$, $\tilde{v}_j = \sum_{l=1}^j v_l$, $\tilde{d}_k = \sum_{l=1}^k d_l$ és $\tilde{a}_k = \sum_{l=1}^k a_l$ összefüggésekkel definiáltak.

Ebben a tézisben a REKONSTRUKCIÓ(\mathcal{G}, \mathcal{L}) és EGYÉRTELMŰSÉG(\mathcal{G}, \mathcal{L}) feladatokat vizsgáljuk különböző \mathcal{G} halmazosztályok esetén az \mathcal{L}_2 és \mathcal{L}_4 irányhalmazok használatával. A rekonstrukció megkönnyítése érdekében mindig feltételezni fogjuk, hogy a rekonstruálandó diszkrét halmaznak valamilyen geometriai tulajdonságai vannak: összefüggő, konvex, vagy irányított.

Egy F diszkrét halmaz két pontja, $P = (p_1, p_2)$ és $Q = (q_1, q_2)$, *4-szomszéd*, ha $|p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = 1$. A P és Q pontok *8-szomszédok*, ha 4-szomszédok vagy $(|p_1 - q_1| = 1$ és $|p_2 - q_2| = 1)$. A P_0, \dots, P_k különböző pontokból álló sorozat *4/8-út* a P_0 pontból a P_k pontba egy F diszkrét halmazban, ha a sorozat minden pontja F -ben van és P_l és P_{l-1} 4/8-szomszédok minden $l = 1, \dots, k$ esetén. Egy F diszkrét halmaz *4/8-összefüggő* ha F bármely két pontja között van F -beli 4/8-út. A 4-összefüggő halmazt *poliominónak* is hívják. Ha egy diszkrét halmaz nem 4-összefüggő, akkor több poliominóból áll. F maximális 4-összefüggő részhalmazai F egyértelműen meghatározott partíciónálását adják. F egy maximális 4-összefüggő részhalmazát F egy *komponensének* nevezzük.

Egy F diszkrét halmaz *konvex* a $v = (a, b)$ irány mentén, ha bármely két $(i_1, j_1) \in F$ és $(i_2, j_2) \in$

F pontra, ha $(i_2, j_2) = (i_1, j_1) + k \cdot v$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ -re, akkor $(i_1, j_1) + t \cdot v \in F$ minden $t \in \{0, \dots, k\}$ -ra teljesül. Speciálisan a diszkrét halmaz horizontálisan/vertikálisan/diagonálisan/antidiagonálisan konvex, ha konvex az $(1, 0)/(0, 1)/(1, 1)/(-1, 1)$ mentén, ebben a sorrendben. Ha egy diszkrét halmaz horizontálisan és vertikálisan is konvex, akkor hv -konvexnek nevezzük. Vezessük be a \mathcal{HV} és \mathcal{S}'_8 jelöléseket a hv -konvex és a hv -konvex 8- de nem 4-összefüggő diszkrét halmazok osztályaira.

Egy adott $P = (p_1, p_2)$ pontra a P körüli négy kvadránst az alábbi halmazokkal definiáljuk

$$\begin{aligned} R_0(P) &= \{Q = (q_1, q_2) \mid q_1 \leq p_1, \quad q_2 \leq p_2\}, \\ R_1(P) &= \{Q = (q_1, q_2) \mid q_1 \geq p_1, \quad q_2 \leq p_2\}, \\ R_2(P) &= \{Q = (q_1, q_2) \mid q_1 \geq p_1, \quad q_2 \geq p_2\}, \\ R_3(P) &= \{Q = (q_1, q_2) \mid q_1 \leq p_1, \quad q_2 \geq p_2\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Egy F diszkrét halmaz Q -konvex, ha $R_k(P) \cap F \neq \emptyset$ minden $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ -re való teljesülése magával vonja, hogy $P \in F$ is teljesül. A több komponensből álló Q -konvex halmazok osztályát Q' -vel jelöljük.

Egy F diszkrét halmazbeli 4-út egy északkelet út (röviden ÉK-út) a P_0 pontból a P_t pontba, ha az út minden P_l pontja északra vagy keletre van a P_{l-1} ponttól minden $l = 1, \dots, t$ esetén. A DNY-, DK-, ÉNY-utak hasonlóan definiálhatók. Az F diszkrét halmaz $ÉK$ -irányított, ha F -nek van egy kitüntetett pontja, amit *forrásnak* nevezünk, úgy, hogy abból F bármelyik pontjába vezet $ÉK$ -út. Hasonló definíciók adhatók a DNY-, DK-, és ÉNY-irányítottságra is. Egyszerűen azt is mondjuk, hogy egy diszkrét halmaz *irányított*, ha $ÉK$ -, DNY-, DK-, vagy ÉNY-irányított. Egy adott (a, b) rácsirányra az olyan $ÉK$ -irányított poliominók halmazát, melyek konvexek az (a, b) irány mentén $\mathcal{DCP}_{(a,b)}^{NE}$ -vel fogjuk jelölni.

(Nem)-egyértelműségi eredmények irányított poliominókra

Tekintsük azt a problémát, amikor egy poliominót szeretnénk rekonstruálni annak horizontális és vertikális vetületeiből. A [12] cikkben bizonyítást nyert, hogy ha feltételezzük, hogy a poliominó konvex a horizontális vagy a vertikális irány mentén és $ÉK$ -irányított is, akkor a fenti probléma megoldása egyértelműen meghatározott. Később egy algoritmust is megadtak ilyen tulajdonságú $m \times n$ méretű poliominók horizontális és vertikális vetületekből való $O(mn)$ időben történő előállítására [17]. A [12] és [17] cikkek eredményei általánosíthatók DK-, ÉNY- és DNY-irányított horizontálisan vagy vertikálisan konvex poliominókra is. Ezeket az egyértelműségi és rekonstrukciós eredményeket a következő tételben foglalhatjuk össze.

Tétel 1 [12; 17] *Bármely horizontálisan vagy vertikálisan konvex irányított $m \times n$ méretű poliominó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületeiből és a forrásából $O(mn)$ időben.*

Most azt fogjuk megvizsgálni, hogy a Tétel 1 általánosítható-e más irányokban konvex irányított poliominókra is. Megnézzük, hogy a konvexitás irányának változtatása miként befolyásolja a lehetséges megoldások számát. Habár csak $ÉK$ -irányított poliominókkal fogunk foglalkozni, kézenfekvő módon hasonló eredményeket kaphatunk DK-, ÉNY- és DNY-irányított poliominókra is.

Először az diagonálisan konvex $ÉK$ -irányított poliominókra koncentrálunk, azaz a $\mathcal{DCP}_{(1,1)}^{NE}$ osztályra. Az alábbi egyszerű lemma tetszőleges $ÉK$ -irányított poliominóra igaz.

Lemma 1 Legyen D egy ÉK-irányított poliominó $\mathcal{H}(D) = (h_1, \dots, h_m)$ és $\mathcal{V}(D) = (v_1, \dots, v_n)$ vetületekkel. Akkor $(m, j) \in D$ akkor és csak akkor, ha $1 \leq j \leq h_m$, és $(i, 1) \in D$ akkor és csak akkor, ha $m - v_1 < i \leq m$.

Most tekintsünk egy tetszőleges $D \in \mathcal{DCP}_{(1,1)}^{NE}$ poliominót. A Lemma 1 alapján a D poliominó egy F részhalmaza (mely D első oszlopának és utolsó sorának összes elemét tartalmazza) a h_m és v_1 komponensek által meghatározott. A következő lemma alapján D többi eleme pedig meghatározott az F halmaz által.

Lemma 2 Legyen $D \in \mathcal{DCP}_{(1,1)}^{NE}$, $F \subset D$ és $(i, j) \in \{1, \dots, m-1\} \times \{2, \dots, n\}$ egy olyan pozíció, hogy minden $(i', j') \neq (i, j)$ -re ha $i' \geq i$ és $j' \leq j$, akkor $(i', j') \in D \leftrightarrow (i', j') \in F$. Ekkor $\sum_{t=i+1}^n \hat{f}_{tj} < v_j$ és $\sum_{t=1}^{j-1} \hat{f}_{it} < h_i$ szükséges és elegendő ahhoz, hogy $(i, j) \in D$ teljesüljön.

Azaz ha $D \in \mathcal{DCP}_{(1,1)}^{NE}$, akkor a Lemma 1 alapján D első oszlopa és utolsó sora egyértelműen meghatározott v_1 és h_m által, tehát a D poliominó egy F részhalmaza megtalálható (mely D első oszlopából és utolsó sorából áll). Ekkor az $(m-1, 2)$ pozícióra a Lemma 2 feltételei teljesülnek. Ezért ezen lemma alkalmazásával megállapítható, hogy az $(m-1, 2)$ pozíció D -hez tartozik-e, és ha igen, akkor ezt hozzávesszük F -hez, azaz $F = F \cup \{(m-1, 2)\}$ lesz. A pozíciókon a bal alsóból a jobb felső felé haladva F ily módon mindig teljesíteni fogja a Lemma 2 feltételeit, így a fenti eljárás mindig megismételhető. Az eljárás befejeztével azt kapjuk, hogy $F = D$. A konstrukció az egyértelműséget is garantálja. Tehát kimondhatjuk a következő tételt.

Tétel 2 Legyen $H \in \mathbb{N}^m$ és $V \in \mathbb{N}^n$. A $\mathcal{DCP}_{(1,1)}^{NE}$ osztályban legfeljebb egy olyan D poliominó van, melyre $\mathcal{H}(D) = H$ és $\mathcal{V}(D) = V$.

Továbbá egy algoritmus (DCP algoritmus) is leírható, mellyel a $\mathcal{DCP}_{(1,1)}^{NE}$ osztályban adott horizontális és vertikális vetületekkel lehetségesen létező poliominó előállítható $O(mn)$ időben.

Azonban a Tétel 2-vel szemben azt találjuk, hogy drasztikus változás következik be a lehetséges megoldások számában, ha a diagonális konvexitás helyett antidiagonálisat feltételezünk.

Tétel 3 Bizonyos vetületek esetén a $\mathcal{DCP}_{(-1,1)}^{NE}$ osztályban exponenciálisan sok poliominó lehet ugyanazzokkal a horizontális és vertikális vetületekkel.

A Tétel 2 és Tétel 3 alapján elég nyilvánvaló, hogy a konvexitás iránya fontos szerepet játszik annak meghatározásában, hogy fellép-e bizonytalanság a rekonstrukció során. Azt is beláthatjuk, hogy a Tétel 3 általánosítható olyan poliominókra is, melyek egy tetszőleges $d \notin \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ rácsirány mentén konvexek.

Tétel 4 Legyen $d = (a, b)$ egy olyan rácsirány, hogy $d \notin \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Bizonyos vetületek esetén a $\mathcal{DCP}_{(a,b)}^{NE}$ osztályban exponenciálisan sok poliominó lehet ugyanazzokkal a horizontális és vertikális vetületekkel.

Azt is meg kell említeni, hogy a Tétel 2 és Tétel 4 alkalmazásával az eredményeinket tovább általánosíthatjuk olyan ÉK-irányított poliominókra, melyek tetszőleges véges vagy bizonyos végtelen rácsirány-halmazok összes iránya mentén konvexek.

Az irányított poliominók egyértelműségével és nem-egyértelműségével kapcsolatos elméleti eredményeink, valamint a rekonstrukciós algoritmus a [1] cikkben lett publikálva.

Q-konvex nem 4-összefüggő diszkrét halmazok rekonstruálása

A Q-konvexek osztálya egyik a legbővebb olyan osztályoknak, melyekben a rekonstrukció már két vetületből polinomiális időben végrehajtható. A [11] cikkben bizonyítást nyert, hogy a horizontális és vertikális irányok mentén Q-konvex halmazok a horizontális és vertikális vetületekből $O(N^4 \log N)$ időben rekonstruálhatók (ahol $N = \max\{m, n\}$). A tézisben egy gyorsabb algoritmust ismertetünk erre az osztályra abban az esetben, ha azt is tudjuk előzetesen, hogy a rekonstruálandó Q-konvex halmaz kettő vagy több komponensből áll.

Itt egy fontos észrevétel az, hogy egy tetszőleges Q' -beli halmaz esetén a komponensek legkisebb befoglaló téglalapjai (LBT) csak két lehetséges módon helyezkedhetnek el. Az esetleges üres sorok és oszlopok figyelmen kívül hagyásával a jobb alsó és bal felső, vagy a bal alsó és jobb felső sarkaikkal csatlakoznak egymáshoz. Az előbbi esetben azt mondjuk, hogy a halmaz *ÉNY típusú*, az utóbbi esetben azt, hogy *ÉK típusú*. A következő lemma a komponensek irányítottságáról szól, mely a halmaz típusától függ.

Lemma 3 *Legyen $F \in Q'$, melynek komponensei F_1, \dots, F_k ($k \geq 2$). Ha F ÉNY/ÉK típusú, akkor F_1, \dots, F_{k-1} rendre ÉNY/ÉK-irányított és F_2, \dots, F_k rendre DK/DNY-irányított.*

Most megmutatjuk, hogyan reprezentálhatunk egy Q' -beli halmazt. Az alábbi következményt fogalmazhatjuk meg.

Következmény 1 *Legyen $F \in Q'$, melynek komponensei F_1, \dots, F_k . Ekkor léteznek egyértelműen meghatározott $0 < i_1 < \dots < i_k = m$ sorindexek és $0 < j_1 < \dots < j_k \leq n$ oszlopindexek úgy, hogy minden $l = 1, \dots, k$ -ra ($k \geq 2$) (i_l, j_l) az F_l komponens LBT-jának jobb alsó pozíciója, ha F ÉNY típusú és (i_l, j_{k-l+1}) az F_l komponens LBT-jának bal alsó pozíciója, ha F ÉK típusú.*

Az F típusától függően legyen

$$C_F = \begin{cases} \{(i_l, j_l) \mid l = 1, \dots, k-1\}, & \text{ha } F \text{ ÉNY típusú,} \\ \{(i_l, j_{k-l+1}) \mid l = 1, \dots, k-1\}, & \text{ha } F \text{ ÉK típusú,} \end{cases} \quad (2)$$

ahol i_1, \dots, i_k és j_1, \dots, j_k a Következmény 1-ben említett egyértelműen meghatározott indexeket jelölik. Nem nehéz látni, hogy C_F az F_1, \dots, F_{k-1} ÉNY-/ÉK-irányított komponensek forrásaiból áll, ha F ÉNY/ÉK típusú. C_F bármely elemének ismerete hasznos a Q' osztálybeli rekonstrukció szempontjából, ahogy azt a következő tétel is állítja.

Tétel 5 *Bármely $F \in Q'$ egyértelműen meghatározott a Q' osztályban a horizontális és vertikális vetületei, a típusa és C_F egy tetszőleges eleme által.*

A Tétel 5 alapján az F Q-konvex halmaz rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületeiből, ha ismerjük a típusát és C_F legalább egy elemét. A C_F -beli elemek megtalálásához F kumulált vektorait hívjuk segítségül. Azt mondjuk, hogy az $(i, j) \in \{1, \dots, m-1\} \times \{1, \dots, n-1\}$ pozíció egy *ÉNY típusú egyenlőségi pozíciója* F -nek, ha $\tilde{h}_i = \tilde{v}_j$. Hasonló módon azt mondjuk, hogy $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{2, \dots, n+1\}$ egy *ÉK típusú egyenlőségi pozíciója* F -nek, ha $\tilde{h}_i = \tilde{v}_n - \tilde{v}_{j-1}$. Jelöljük F ÉNY/ÉK típusú egyenlőségi pozícióinak halmazát L_F^{NW} / L_F^{NE} -vel. Bebizonyítható, hogy F egyenlőségi pozícióinak halmazai és a forrásokat tartalmazó C_F halmaz között szoros kapcsolat áll fenn. Nevezetesen $C_F \subseteq L_F^{NW}$ ha F ÉNY típusú és $C_F \subseteq L_F^{NE}$ ha F ÉK típusú.

A fenti eredményeket felhasználva leírható egy olyan algoritmus, mely Q' -beli halmazokat rekonstruál azok horizontális és vertikális vetületeiből. Ezt az algoritmust 2-RECQ'-nak neveztük el és lényegében azt csinálja, hogy ellenőrzi az összes egyenlőségi pozíciót, hogy az lehet-e forrása egy komponensnek. Ezt egyszerűen úgy végzi el, hogy megpróbálja rekonstruálni a komponenseket a feltételezett (vagy valódi) forrásokból. Ami a 2REC-Q' algoritmus komplexitását illeti, a következőt állíthatjuk.

Tétel 6 *A 2-RECQ' algoritmus a REKONSTRUKCIÓ(Q' , \mathcal{L}_2) feladatot $O(mn \cdot \min\{m, n\})$ időben oldja meg. Az algoritmus az összes adott vetületekkel rendelkező Q' -beli halmazt megtalálja.*

Néhány további lemmával az is bebizonyítható, hogy a S'_8 -beli halmazok majdnem olyan tulajdonságúak, mint a Q' -beliek. Az egyetlen különbség az, hogy a Q' -beli elemek komponensei lehetnek szeparáltak (azaz lehet üres sor és/vagy oszlop az egymást követő komponensek között), míg az S'_8 -beli halmazok komponensei mindig 8-összefüggők. Azaz

Tétel 7 $S'_8 \subset Q'$.

Tétel 7 azonnal magával vonja, hogy a REKONSTRUKCIÓ(S'_8 , \mathcal{L}_2) feladat is megoldható $O(mn \cdot \min\{m, n\})$ időben. Meglepő módon azonban a rekonstrukció hatékonyabb lehet, ha a Q' -beli rekonstruálandó halmazról feltesszük, hogy nem 8-összefüggő (azaz van legalább egy üres sora vagy oszlopa). Továbbá ebben az esetben a bizonytalanság csak a halmaz típusával kapcsolatban léphet fel, így igaz a következő

Tétel 8 *A REKONSTRUKCIÓ($Q' \setminus S'_8$, \mathcal{L}_2) feladat megoldható $O(mn)$ időben. A megoldások száma legfeljebb kettő.*

A [10] cikkben egy olyan algoritmust (Algoritmus C) közöltek, melynek legrosszabb esetben a futási ideje $O(mn \cdot \min\{m^2, n^2\})$ és átlagos futási ideje az eddigi legjobb a hw -convex 8-összefüggő halmazok rekonstruálására, amennyiben két vetületet használunk. Annak érdekében, hogy összehasonlíthassuk ennek és a 2-RECQ' algoritmusnak az átlagos futási idejét a S'_8 osztályon, ebből az osztályból egyenletes eloszlás mellett generáltunk halmazokat. Ezt a [10]-ben közölt eljárás egy kicsit módosított változatával tettük meg. A kísérletünkben a generált halmazok különböző méretűek voltak, de mindegyik teszt adathalmaz 1000 darab ugyanolyan méretű hw -konvex 8-összefüggő, de nem 4-összefüggő diszkrét halmazt tartalmazott. Ezek után a halmazokat mindkét algoritmussal rekonstruáltuk. A másodpercben vett átlagos futási időket az 1. táblázat mutatja. Ezen eredmények alapján elmondható, hogy az általunk kidolgozott algoritmusnak nemcsak a legrosszabb eset komplexitása jobb (lásd Tétel 6), de az átlagos futási ideje is sokkal jobb volt a öt teszthalmaz mindegyikén.

Algoritmusunk eredeti formájában a hw -convex 8- de nem 4-összefüggő halmazok rekonstruálására lett kidolgozva [3]. Az a változat, mely Q' -beli halmazokat is rekonstruál, a [2] könyvben található. Az algoritmus alapját képező elméleti megfontolások a [4] cikkben lettek részletesen közölve.

Rekonstrukció négy vetületből

Számos eredmény ismert olyan rekonstrukciós feladatokkal kapcsolatban, melyek csupán két vetületet használnak. A három vagy annál több vetületből történő rekonstrukció elmélete azonban jelenleg még

1. táblázat. A 2-REC8' algoritmus és a [10]-ben közölt Algoritmus C átlagos futási ideje másodpercekben az öt tesztalmazon

Méret $n \times n$	2-REC8'	C
20×20	0.000272	0.011511
40×40	0.001064	0.032524
60×60	0.002597	0.065897
80×80	0.004746	0.116505
100×100	0.007831	0.178633

messze nem kidolgozott. A következőkben leírunk egy olyan eljárást, mely négy vetületet használ olyan diszkrét halmazok rekonstruálására, melyek legalább két komponensből állnak. Az algoritmusunk egy speciális diszjunkt komponensekből álló halmazosztályon dolgozik, a felbontható halmazok osztályán.

Ha adott két diszkrét halmaz, C és D , melyeket a $\hat{C} = (\hat{c}_{ij})_{m_1 \times n_1}$ és $\hat{D} = (\hat{d}_{ij})_{m_2 \times n_2}$ bináris mátrixok reprezentálnak, akkor azt mondjuk, hogy az $\hat{F} = (\hat{f}_{ij})_{m_3 \times n_3}$ bináris mátrix által reprezentált F diszkrét halmazt C -nek D -hez való *északnyugat ragasztásával* (röviden *ÉNY ragasztásával*) kapjuk, ha

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} \hat{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{D} \end{pmatrix} \quad (3)$$

úgy, hogy $m_3 \geq m_1 + m_2$ and $n_3 \geq n_1 + n_2$. Ha C egy komponensből áll, akkor azt mondjuk, hogy C az F *ÉNY komponense*. ÉK, DK, és DNY ragasztások és komponensek hasonlóan definiálhatók.

F két komponense, F_1 és F_2 *diszjunktak*, ha F_1 és F_2 sorindexeit és oszlopindexeit tartalmazó halmazok is diszjunktak. Azt mondjuk, hogy a k ($k \geq 2$) komponensből álló F diszkrét halmaz *felbontható*, ha az alábbi három tulajdonság mindegyike teljesül:

- (α) F komponensei a horizontális és vertikális vetületeikből polinomiális időben egyértelműen rekonstruálhatók abban az osztályában, mely az összes poliominót tartalmazza,
- (β) a komponensek legkisebb befoglaló téglalapjainak (LBT) sor és oszlopindexiből képzett halmazai páronként diszjunktak,
- (γ) ha $k > 2$, akkor F -et egy komponensnek egy $k - 1$ komponensből álló felbontható diszkrét halmazhoz való ragasztásával kapjuk, a négy ragasztási művelet valamelyikével.

Tulajdonképpen az (α) tulajdonság általában nem teljesül. De élhetünk azzal a megszorítással, hogy a komponensek egy olyan \mathcal{C} osztályból származzanak, melyben minden poliominót egyértelműen meghatároznak a horizontális és vertikális vetületek. Ebben az esetben, ha szükséges, akkor hangsúlyozzuk, hogy a diszkrét halmaz a \mathcal{C} osztályra való tekintettel felbontható. Egy felbontható diszkrét halmaz típusa teljesen hasonlóan definiálható, mint egy \mathcal{Q}' -beli halmazé. Ha az üres sorok és oszlopok elhagyásával az F felbontható diszkrét halmaz komponenseinek LBT-jai a jobb alsó és bal felső (bal alsó és jobb felső) sarkaikkal kapcsolódnak egymáshoz, akkor F *ÉNY (ÉK) típusú*. A (\mathcal{C} osztályra való tekintettel) felbontható diszkrét halmazok osztályát \mathcal{DEC} ($\mathcal{DEC}_{\mathcal{C}}$) jelöli. Továbbá bevezetjük a \mathcal{S}^{NW} és \mathcal{S}^{NE} jelöléseket az ÉNY/ÉK típusú felbontható diszkrét halmazok osztályaira.

A felbontható diszkrét halmazok egy leírása a következő lemma segítségével lehetséges.

Lemma 4 Az F diszkrét halmaz akkor és csak akkor felbontható, ha kielégíti az (α) tulajdonságot és létezik egy olyan diszkrét halmazokból álló $F^{(1)}, \dots, F^{(k)}$ ($k \geq 2$) sorozat, hogy $F^{(1)}$ egy komponensből áll, $F^{(k)} = F$, és bármely $l = 1, \dots, k-1$ -re $F^{(l+1)}$ -et úgy kapjuk, hogy egy komponenszt ragasztunk $F^{(l)}$ -hez a négy ragasztási művelet valamelyikével.

Egy adott $F \in \mathcal{DEC}$ diszkrét halmazra a fenti lemma által szolgáltatott sorozat nem egyértelműen meghatározott, de bármely ilyen sorozatot az F halmaz egy *ragasztási sorozatának* nevezünk. Azt is beláthatjuk, hogy minden $F \in \mathcal{DEC}$ halmazhoz egyértelműen létezik egy j egész úgy, hogy minden $F^{(1)}, \dots, F^{(k)} = F$ ragasztási sorozat esetén $F^{(j)}$ ugyanaz, $F^{(j)} \in \mathcal{S}^{NW} \cup \mathcal{S}^{NE}$, és $j = k$ vagy $F^{(j+1)} \notin \mathcal{S}^{NW} \cup \mathcal{S}^{NE}$. Az egyértelműen meghatározott $F^{(j)}$ halmazt az F halmaz *középpontjának* nevezzük és $C(F)$ -fel jelöljük.

Az (α) és (β) tulajdonságok alapján egy felbontható diszkrét halmaz rekonstrukciója során elegendő beazonosítani a komponensek LBT-jait. A következőkben csak ÉNY komponensekkel foglalkozunk, de az eredmények könnyen módosíthatók ÉK, DK és DNY komponensekre is. Először egy szükséges feltételt adunk az ÉNY komponens LBT-jának megtalálására.

Lemma 5 Legyen $F \in \mathcal{DEC}$. Ha (i, j) az F ÉNY komponensének jobb alsó pozíciója, akkor i a legkisebb olyan egész, melyhez létezik olyan j egész hogy $\tilde{h}_i = \tilde{v}_j = \tilde{a}_{i+j-1} > 0$ és $a_{i+j} = 0$.

Sajnálatos módon a Lemma 5 általában nem szolgáltat elégséges feltételt az ÉNY komponens LBT-jának beazonosításához. A következő tétel segítségével azonban megállapítható, hogy a felbontható diszkrét halmaznak van-e ÉNY vagy DK komponense.

Tétel 9 Legyen \mathcal{C} poliominók egy tetszőleges osztálya, melyben a poliominók egyértelműen rekonstruálhatók a horizontális és vertikális vetületeikből polinomiális időben. Legyen $F \in \mathcal{DEC}_{\mathcal{C}}$ és $\mathcal{H}(F) = (h_1, \dots, h_m)$, $\mathcal{V}(F) = (v_1, \dots, v_n)$ és $\mathcal{A}(F) = (a_1, \dots, a_{m+n-1})$. Ha (i, j) kielégíti a Lemma 5 szükséges feltételeit úgy, hogy létezik egy $P \in \mathcal{C}$ poliominó, melyre $\mathcal{H}(P) = (h_1, \dots, h_i)$, $\mathcal{V}(P) = (v_1, \dots, v_j)$ és $\mathcal{A}(P) = (a_1, \dots, a_{i+j-1})$, akkor P az F ÉNY komponense vagy/és F -nek van DK komponense. Ha nincs ilyen pozíció, akkor F -nek nincs ÉNY komponense.

Ha az F felbontható diszkrét halmaz eleme az $\mathcal{S}^{NW}/\mathcal{S}^{NE}$ osztálynak, akkor Tétel 9 ÉNY/ÉK verziójának segítségével megtalálható F ÉNY/ÉK komponensének LBT-ja. Ez azt jelenti, hogy ha egyszer F középpontja körül minden komponenszt lebontottunk, akkor a Tétel 9 magának a középpontnak a rekonstruálására már hatékony eszközt ad. A következő tétel alapján F ÉNY komponense akkor is megtalálható (ha egyáltalán létezik), ha $F \in \mathcal{DEC} \setminus (\mathcal{S}^{NW} \cup \mathcal{S}^{NE})$.

Tétel 10 Tegyük fel, hogy $F \in \mathcal{DEC} \setminus (\mathcal{S}^{NW} \cup \mathcal{S}^{NE})$ és az (i, j) pozíció kielégíti a Tétel 9 feltételeit egy P poliominóval. Továbbá legyen $\{i_1, \dots, i_2\} \times \{j_1, \dots, j_2\}$ a $C(F)$ LBT-ja. P F -nek ÉNY komponense akkor és csak akkor, ha létezik $i' \in \{i_1, \dots, i_2\}$ úgy, hogy $i < i'$ vagy létezik $j' \in \{j_1, \dots, j_2\}$ úgy, hogy $j < j'$.

A fenti szükséges és elegendő feltétel alkalmazásával megtervezhető egy algoritmus (4-RECDEC algoritmus), mely felbontható diszkrét halmazokat rekonstruál azok horizontális, vertikális, diagonális és antidiagonális vetületeiből. Ez az algoritmus a diszkrét halmazt komponensenként rekonstruálja. A komplexitását illetően a következő tétel mondható ki.

Tétel 11 Legyen \mathcal{C} poliominók egy olyan osztálya, melyben az összes poliominó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületekből polinomiális (mondjuk $O(f(m, n))$) időben. Akkor a 4-RECDEC algoritmus a REKONSTRUKCIÓ($\mathcal{DEC}_{\mathcal{C}}, \mathcal{L}_4$) feladatot $O(\min\{m, n\} \cdot f(m, n))$ időben oldja meg. Az algoritmus a $\mathcal{DEC}_{\mathcal{C}}$ osztály összes adott vetületekkel rendelkező elemét megtalálja.

Az is bizonyítható, hogy minden legalább két komponensből álló Q -konvex halmaz felbontható is. Igazából ezen osztályok között az összefüggés még erősebb, mépedig $Q' \subset \mathcal{S}^{NW} \cup \mathcal{S}^{NE}$. Ennek a kapcsolatnak fontos következménye van a Q' osztályban a négy vetületből történő rekonstrukcióra vonatkozólag.

Következmény 2 A REKONSTRUKCIÓ(Q', \mathcal{L}_4) feladat megoldható $O(mn)$ időben. A megoldás a Q' osztályban egyértelműen meghatározott.

A fenti megállapítás és Tétel 7 egyenes következménye az alábbi.

Következmény 3 A REKONSTRUKCIÓ($\mathcal{S}'_8, \mathcal{L}_4$) feladat megoldható $O(mn)$ időben. A megoldás a \mathcal{S}'_8 osztályon belül egyértelműen meghatározott.

Most nézzük meg, hogyan alkalmazható a dekompozíciós technika hv -konvex halmazok négy vetületből történő rekonstruálására. Először vizsgáljuk meg a $\mathcal{HV} \cap \mathcal{DEC}$ osztályt, azaz a hv -konvex felbontható diszkrét halmazok osztályát. A következő tétel azt mondja ki, hogy ebben az osztályban a rekonstrukció polinomiális időben megoldható.

Tétel 12 A 4-RECDEC algoritmus a REKONSTRUKCIÓ($\mathcal{HV} \cap \mathcal{DEC}, \mathcal{L}_4$) feladatot $O(mn \cdot \min\{m^3, n^3\})$ időben oldja meg. Az algoritmus a $\mathcal{HV} \cap \mathcal{DEC}$ osztály összes megadott vetületekkel rendelkező elemét megtalálja.

Azaz az összes olyan hv -konvex felbontható halmaz megtalálható polinomiális időben, melyeknek horizontális, vertikális, diagonális és antidiagonális vetületei a megadottakkal megegyeznek. Ez persze azt is jelenti, hogy csak polinomiálisan sok megoldás lehet. A következő tétel azt a kérdést válaszolja meg, hogy szükséges-e négy vetület ahhoz, hogy csak polinomiálisan sok megoldásunk legyen.

Tétel 13 Bizonyos H, V és D vektorok esetén exponenciálisan sok hv -konvex felbontható diszkrét halmaz lehet ugyanazokkal a H horizontális, V vertikális és D diagonális vetületekkel.

Sajnos a 4-RECDEC algoritmus nem alkalmas a KONZISZTENCIA($\mathcal{HV} \cap \mathcal{DEC}, \mathcal{L}_4$) feladat megválaszolására. Előfordulhat ugyanis, hogy az algoritmus egy olyan hv -konvex halmazt rekonstruál, melynek vetületei valóban megegyeznek az előírtakkal, de az (α) tulajdonság esetleg nem teljesül, azaz nem minden komponens egyértelműen meghatározott. Természetesen ebben az esetben a rekonstruált diszkrét halmaz nem eleme a $\mathcal{HV} \cap \mathcal{DEC}$ osztálynak. Ez a 'probléma' azonban hasznunkra fordítható egy olyan gyors és pontos rekonstrukciós heurisztika (4-RECHV algoritmus) megtervezésére, mely a hv -konvexek egy, a felbonthatóknál bővebb részosztályában alkalmazható. A 4-RECDEC algoritmus módosítható úgy, hogy olyan hv -konvex halmazokat is rekonstruálhassunk, melyek a (β) és (γ) tulajdonságokkal rendelkeznek, de az (α) tulajdonsággal nem feltétlenül.

Annak érdekében, hogy a 4-RECHV algoritmus gyorsaságát és pontosságát megállapíthassuk a következő kísérleteket végeztük el. Öt teszhalmazt generáltunk, mindegyik 1000 hv -konvex, (β) és

2. táblázat. A 4-RECHV algoritmus pontossága és átlagos futási ideje az öt tesztalmazon

Test	#korrekt mo.	#inkorrekt mo.	#nincs mo.	idő (s)
Test 1	939	14	47	0.600
Test 2	891	27	82	0.847
Test 3	851	41	108	2.322
Test 4	998	0	2	0.660
Test 5	994	0	6	5.676

(γ) tulajdosságú, k komponensből álló, $n \times n$ méretű hdiszkrét halmazt tartalmazott, bizonyos fix k -ra és n -re. Ezek a paraméterek a következőképpen lettek megválasztva. Teszt 1: $k = 10$, $n = 5$; Teszt 2: $k = 20$, $n = 5$; Teszt 3: $k = 30$, $n = 5$; Teszt 4: $k = 10$, $n = 10$; Teszt 5: $k = 20$, $n = 10$. A 2. táblázat mutatja az öt tesztalmazon mért átlagos futási időket, valamint a korrekt (az eredeti diszkrét halmazzal megegyező) és inkorrekt (az eredeti halmaztól eltérő, de ugyanolyan vetületekkel rendelkező) megoldások számát. Ezekből az eredményekből megállapíthatjuk, hogy a 4-RECHV heurisztikának mind futási idő mind pontosság szempontjából jó a teljesítménye.

A felbonthatóság fogalma és a dekompozíciós technika az [5; 8] cikkek eredménye. A technika különböző osztályon való alkalmazhatóságát a [2; 5; 9] munkákban vizsgáltuk. A három vetületre vonatkozó bizonytalansági eredmény és a rekonstrukciós heurisztika kidolgozása a [6] cikkben került publikálásra.

***hv*-konvex diszkrét halmazok véletlenszerű generálása**

Az elmúlt évek során a *hv*-konvex diszkrét halmazok osztálya a különböző egzakt vagy heurisztikus rekonstrukciós algoritmusok statisztikai indikátorává vált, melynek segítségével jellemezhető egy adott algoritmus hatékonysága sebesség, pontosság, stb. alapján. Ez annyit tesz, hogy a kidolgozott technikákat ezen az osztályon tesztelik.

Sajnálatos módon a terület kutatóinak szembe kellett néznie azzal a problémával, hogy nem volt ismert olyan eljárás, mellyel *hv*-konvex halmazok egyenletes eloszlás mellett lettek volna generálhatók, így a különböző technikák összehasonlítása esetleges volt. A következőkben bemutatunk egy algoritmust, mellyel nem túl nagy, adott méretű *hv*-konvex halmazok generálhatók egyenletes eloszlás szerint.

A [13] cikkben bizonyítást nyert, hogy az $(m+1) \times (n+1)$ méretű legkisebb befoglaló téglalappal (LBT) rendelkező *hv*-konvex poliominók $P_{m+1,n+1}$ száma meghatározható az alábbi formulával

$$P_{m+1,n+1} = \frac{m+n+mn}{m+n} \binom{2m+2n}{2m} - \frac{2mn}{m+n} \binom{m+n}{m}^2. \quad (4)$$

Mi most először egy speciális *hv*-konvex diszkrét halmazokat tartalmazó osztályt vizsgálunk meg, melyet \mathcal{S}' -vel jelölünk. Ennek az osztálynak a halmazaira az teljesül, hogy a komponensek legkisebb befoglaló téglalapjai mindig a jobb alsó és bal felső sarkaikkal csatlakoznak egymáshoz és a halmaz nem tartalmaz üres sort és oszlopot. Könnyen látszik, hogy az \mathcal{S}' -beli $m \times n$ méretű diszkrét halmazok

$S'_{m,n}$ száma az alábbi rekurzív formulával számítható:

$$S'_{m,n} = P_{m,n} + \sum_{k < m, l < n} P_{k,l} \cdot S'_{m-k,n-l}. \quad (5)$$

A (4) egyenletet és a $S'_{1,j} = P_{1,j} = 1$ ($j = 1, \dots, n$) valamint a $S'_{i,1} = P_{i,1} = 1$ ($i = 1, \dots, m$) kezdeti értékeket használva $S'_{m,n}$ $O(m^2n^2)$ időben és $O(mn)$ memóriaigénnyel számítható dinamikus programozással. Ezek alapján kidolgozható egy algoritmus (GENHV-S' algoritmus) \mathcal{S}' -beli adott méretű hv -konvex diszkrét halmazok egyenletes eloszlás szerinti generálására. Ez az eljárás a komponensek egyenletes eloszlás szerinti generálására a [16] cikkben ismertetett módszert alkalmazza.

GENHV-S' algoritmus \mathcal{S}' -beli halmazok egyenletes eloszlás szerinti generálására

Input: Az m és n egészek.

Output: Az $F \in \mathcal{S}'$ $m \times n$ méretű hv -konvex diszkrét halmaz.

Step 1 számítsuk ki $S'_{m,n}$ -t;

Step 2 válasszunk egy r számot a $[1, S'_{m,n}]$ intervallumból egyenletes eloszlás alapján;

Step 3 **if** ($r > P_{m,n}$)

{ $r = r - P_{m,n}$;

for $k = 1$ **to** $m - 1$

for $l = 1$ **to** $n - 1$

if ($r > P_{k,l} \cdot S'_{m-k,n-l}$) $r = r - P_{k,l} \cdot S'_{m-k,n-l}$;

else hívjuk meg a GENHV-S' algoritmust $m - k$ és $n - l$ paraméterekkel; }

Step 4 generáljuk a komponenseket egyenletes eloszlás alapján;

A fenti módszer kiterjeszhető olyan speciális hv -konvex diszkrét halmazokra is, melyek tartalmazhatnak üres sorokat vagy/és oszlopokat is. Ezt az osztályt \mathcal{S} jelöli. Ha az $m \times n$ méretű \mathcal{S} osztályba eső diszkrét halmazok számát $S_{m,n}$ -nel jelöljük, akkor egy, az (5) egyenlethez hasonló rekurzív összefüggést kapunk:

$$S_{m,n} = P_{m,n} + \sum_{k < m, l < n} P_{k,l} \cdot \left(\sum_{i \leq m-k, j \leq n-l} S_{i,j} \right). \quad (6)$$

Ezek után egy a GENHV-S' algoritmushoz hasonló algoritmus adható meg (GENHV-S algoritmus), mellyel az \mathcal{S} -beli elemek is generálhatók egyenletes eloszlás alapján. Azonban némi további megfontolást igényel az, hogy hogyan általánosítható az eljárás a teljes hv -konvex osztályra. Az alábbi egyszerűen bizonyítható lemmát fogjuk használni.

Lemma 6 *Legyen F egy tetszőleges hv -konvex halmaz, melynek $k \geq 2$ komponense van. Akkor létezik olyan egyértelműen meghatározott $F' \in \mathcal{S}$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott k -adrendű π permutáció úgy, hogy F és F' komponensei megegyeznek és, ha F' l -edik komponensének LBT-ja $\{i_l, \dots, i'_l\} \times \{j_l, \dots, j'_l\}$, akkor F l -edik komponensének LBT-ja $\{i_l, \dots, i'_l\} \times \{j_{\pi(l)}, \dots, j'_{\pi(l)}\}$.*

Néhány egyszerűbb változtatást kell végrehajtanunk a GENHV-S' algoritmuson, hogy elérjük a célunkat. Lényegében csak annyit kell tennünk, hogy megfelelő súlyokat rendelünk az olyan \mathcal{S}' -beli diszkrét halmazokhoz, melyek több általános hv -konvex halmazt is reprezentálhatnak. Az \mathcal{S}' ezen

halmazai pontosan azok, melyek több komponensből állnak. Továbbá a Lemma 6 alapján az is nyilvánvaló, hogy minden ilyen k komponensből álló halmaz $k!$ diszkrét halmazt reprezentál.

Így a generáláshoz használt rekurzív formulák a következők szerint módosulnak. Jelölje $HV_{m,n}'^{(t)}$ az olyan $m \times n$ méretű hv -konvex diszkrét halmazok számát, melyek nem tartalmaznak üres sort és oszlopot, és pontosan t komponensből állnak. Akkor $HV_{i,j}'^{(t)} = 0$ ha $i < t$ vagy $j < t$, és $HV_{i,j}'^{(1)} = P_{i,j}$ minden $i = 1, \dots, m$ és $j = 1, \dots, n$ esetén. Végül az (5) formulához hasonló megfontolások alapján $t > 1$ esetén a következő rekurzió teljesül

$$HV_{m,n}'^{(t)} = \sum_{k < m, l < n} P_{k,l} \cdot HV_{m-k,n-l}'^{(t-1)} \cdot t. \quad (7)$$

Ebben a képletben a t szorzótényező mindig eggyel csökken, ahogy a rekurzió mélyül. Ez végül egy $t!$ szorzótényezőt eredményez egy t komponensű halmaz esetén, ami pontosan a megkívánt súly. Ezek után egy egyszerű számítással kapjuk, hogy a tetszőleges, üres sort és oszlopt nem tartalmazó, $m \times n$ méretű hv -konvex halmazok $HV_{m,n}'$ száma

$$HV_{m,n}' = \sum_{t=1}^{\min\{m,n\}} HV_{m,n}'^{(t)}. \quad (8)$$

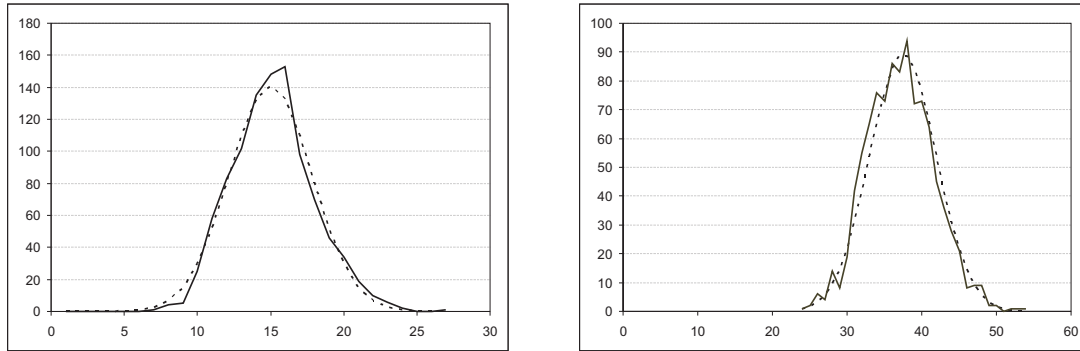
Így tehát egy, a GENHV-S'-hez hasonló generáló eljárást tervezhetünk a hv -konvex üres sorokat és oszlopokat nem tartalmazó halmazok egyenletes generálására, figyelembe véve a Lemma 6 által megfogalmazottakat is – azaz, hogy a generálás utolsó lépéseként a komponensek oszlophalmazait egy véletlenszerűen választott permutáció alkalmazásával felcseréljük. Azt is meg kell említenünk, hogy a (6) és (7) formulák segítségével kidolgozható a GENHV algoritmus is, mellyel már tetszőleges – esetleg üres sorokat, oszlopokat is tartalmazó – hv -konvex halmazok generálhatók egyenletes eloszlás szerint. Így a tetszőleges adott méretű hv -konvex halmazok száma is meghatározható egy a (8) képlethez hasonló formula alapján.

Az ismertett generáló eljárásaink segítségével vizsgálhatóvá válik a hv -konvex halmazok néhány fontos tulajdonsága. Annak érdekében, hogy ezekről statisztikai információkat szerezzünk mind a négy generáló algoritmussal generáltunk teszt adathalmazokat. Minden teszt adathalmaz 1000 azonos méretű hv -konvex diszkrét halmazt tartalmazott, melyeket egyenletes eloszlásból választottunk egy adott osztályból.

Az első vizsgálatunk a különböző hv -konvex halmazosztályok elemeinek számára vonatkozott. Bevezetve rendre a \mathcal{P} és \mathcal{HV}' jelöléseket a hv -konvex poliominók és a hv -konvex, üres sorokat és oszlopokat nem tartalmazó diszkrét halmazok osztályára, triviálisan adódnak a $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{HV}$ és $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{HV}' \subset \mathcal{HV}$ tartalmazások. Ezek ismeretében, és az adott osztályokba eső adott kerületű LBT-pal rendelkező diszkrét halmazok számának meghatározásával, leírhatók az adott osztályok relatív gyakoriságai. Ezek segítségével megválaszolhatók olyan kérdések, hogy egy egyenletes eloszlásból vett hv -konvex halmaz mekkora valószínűséggel teljesít bizonyos tulajdonságokat, melyek a rekonstrukciót megkönnyíthetik.

A második vizsgálat a hv -konvex halmazok komponenseinek számára vonatkozott. Ez az információ különösen hasznos lehet a hv -konvex halmazok rekonstrukciója során. Az \mathcal{S}' és \mathcal{S} osztályokat illetően azt találtuk, hogy (egyenletes eloszlást feltételezve) egy generált speciális hv -konvex diszkrét halmaz komponenseinek várható száma előre becsülhető a halmaz méretének ismeretében. Ez alkalmasint megsegítheti a rekonstrukciót. Kicsit részletesebben, azt találtuk, hogy ha $E_C(n)$ és $D_C^2(n)$

jelölik a \mathcal{C} osztályból egyenletes eloszlás mellett generált $n \times n$ méretű diszkrét halmaz komponenseinek számának várható értékét és varianciáját, akkor 100×100 vagy annál nagyobb méretű halmazok esetén az $E_{\mathcal{S}'}(n) \approx 0.075n$ és $D_{\mathcal{S}'}^2(n) \approx 0.04n$, valamint a $E_{\mathcal{S}}(n) \approx 0.100n$ és $D_{\mathcal{S}}^2(n) \approx 0.06n$ becslések használhatók. Továbbá mind az \mathcal{S}' mind az \mathcal{S} osztályban és minden méretre a komponensek száma egy olyan normálishoz hasonló eloszlást követ, melynek várható értéke $E_{\mathcal{S}'}(n)$ és varianciája $D_{\mathcal{S}'}^2(n)$ (illetve $E_{\mathcal{S}}(n)$ és $D_{\mathcal{S}}^2(n)$ az \mathcal{S} osztály esetén). Ennek ellenőrzésére, két újabb teszhalmazt generáltunk, melyek 1000-1000 egyenletes eloszlásból vett \mathcal{S}' -beli diszkrét halmazt tartalmaztak 200×200 valamint 500×500 méretben. Az 1. ábra mutatja a feltételezett normális eloszlások és a tapasztalati eloszlások közötti különbséget.



1. ábra. A komponensek számának eloszlása a teszhalmazokban (folytonos vonal) és a feltételezett normális eloszlások (szaggatott vonal) 200×200 (bal ábra) és 500×500 (jobb ábra) méretű \mathcal{S}' -beli halmazok esetén

A (7) és (8) formulák segítségével (valamint hasonló formulákkal az \mathcal{S} , \mathcal{S}' és \mathcal{HV} osztályokban) lehetőség van a komponensek számának valódi eloszlását is leírni, ha egyenletes eloszlás mellett generálunk $h\nu$ -convex \mathcal{HV}' -beli halmazokat, mivel ebben az esetben leszámítható, hogy hány olyan eleme van az adott osztálynak, melynek pontosan k komponense van. A 3. táblázat azon valószínűségi változók várható értékeit és varianciáit mutatják, melyek egy egyenletes eloszlásból vett \mathcal{HV}' illetve \mathcal{HV} osztálybeli halmaz komponenseinek számát írják le a halmaz méretétől függően. A \mathcal{HV} osztályra a 80×80 -nál nagyobb méretű halmazokra nem tudtunk statisztikát készíteni a generáló algoritmus nagy időigénye miatt. Ez mutatja a (talán egyetlen) hátrányát a generáló eljárásnak, nevezetesen, hogy csak mérsékelten nagy halmazokra alkalmazható.

3. táblázat. A komponensek számának $E_{\mathcal{HV}'}(n)$ ($E_{\mathcal{HV}}(n)$) várható értéke és $D_{\mathcal{HV}'}^2(n)$ ($D_{\mathcal{HV}}^2(n)$) varianciája $n \times n$ méretű halmazok esetén a \mathcal{HV}' (\mathcal{HV}) osztályokban

n	$E_{\mathcal{HV}'}(n)$	$D_{\mathcal{HV}'}^2(n)$	$E_{\mathcal{HV}}(n)$	$D_{\mathcal{HV}}^2(n)$
20	6.53981	9.84446	9.03570	8.12406
40	26.33821	16.00766	26.11090	9.54114
60	46.30283	12.92260	43.68220	10.00145
80	65.70631	12.05665	61.49588	10.72577
100	84.99456	11.80716	–	–
200	181.53870	12.45513	–	–

A fejezetben bemutatott generáló eljárások, illetve a statisztikák a [7] cikkben találhatóak meg.

Összegzés

Geometriai információk használata bináris képek (diszkrét halmazok) vetületekből történő rekonstrukciója során hatékony eszköz lehet azon problémák kiküszöbölésére, melyek abból adódnak, hogy kevés a rendelkezésre álló vetületek száma. A leggyakrabban alkalmazott tulajdonságok, melyek a rekonstrukciót megkönnyíthetik: összefüggőség, konvexitás és irányítottság. Ha az előállítandó diszkrét halmaz csak egyet teljesít ezek közül a tulajdonságok közül, akkor a rekonstrukció általában nem egyszerűsödik. A disszertációban a teljesség igénye nélkül összefoglaltuk a fenti tulajdonságok leggyakoribb kombinációit, melyek gyors és megbízható rekonstrukciót eredményeznek.

Azt találtuk, hogy ha a rekonstruálandó diszkrét halmaz *irányított és konvex* bizonyos irányok mentén, akkor ez a horizontális és vertikális vetületekből egyértelmű rekonstrukciót biztosít. Ugyanakkor ez az eredmény rendkívül érzékeny abban az értelemben, hogy a konvexitás irányának már a legcsekélyebb mértékű megváltoztatása is kezelhetetlenül sok megoldáshoz vezethet. Az *összefüggőség és konvexitás* különböző változatainak kombinációi szintén garantálhatják, hogy a rekonstrukció a horizontális és vertikális vetületekből polinomiális időben megtörténjen. Ebben az esetben néhány szép tétel adódik a lehetséges megoldások számával és a rekonstrukció bonyolultságával kapcsolatban.

Arra az esetre, amikor négy vetület áll rendelkezésre bevezettük a *felbonthatóság* fogalmát és megmutattuk, hogy minden felbontható diszkrét halmaz rekonstruálható a horizontális, vertikális, diagonális és antidiagonális vetületeiből polinomiális időben. Ez az algoritmus a disszertáció különösen fontos eredménye, mivel a mai napig csak igen kevés olyan rekonstrukciós eljárás ismert, mely négy vetületet használna. Továbbá ez a technika alapjául szolgálhat további, négy vetületet használó rekonstrukciós heurisztikák kidolgozásának.

Emellett megoldottuk a *hv*-konvex diszkrét halmazok egyenletes eloszlásból való generálhatóságának problémáját is (nem túl nagy méretű halmazok esetén). A bemutatott módszer egyéb osztályokra is könnyen általánosítható. A generáló algoritmus alkalmazásával néhány olyan statisztikát is ismertettünk, melyek hasznosak lehetnek hatékony rekonstrukciós algoritmusok elemzésében és tervezésében.

A disszertációban bemutatott elméleti eredmények önmagukban is érdekesek, de sokkal hasznosabb lehet az, hogy ezek által betekintést nyerhetünk a bináris tomográfia matematikai viselkedésébe. A bináris tomográfia elméletének megismerése ugyanis elengedhetetlen ahhoz, hogy hatékony, a gyakorlatban is sikeresen alkalmazható rekonstrukciós eljárásokat tervezzünk.

Az eredmények tézisszerű összefoglalása

Az alábbiakban hat tézispontba rendezve összegezzük a Szerző kutatási eredményeit. A kutatásokból származó publikációkat, valamint azok tartalmának az egyes tézispontokhoz való viszonyát a 4. táblázat tekinti át.

1.) Egy korábbi eredmény szerint a horizontálisan vagy vertikálisan konvex ÉK-irányított poliomínók a horizontális és vertikális vetületeikből egyértelműen rekonstruálhatók polinomiális időben. A Szerző megvizsgálta, hogy a konvexitás irányának változtatása milyen módon befolyásolja a fenti eredményt. Azt tapasztalta, hogy a fenti tétel továbbra is igaz marad, ha diagonális konvexitást feltételezünk a rekonstruálandó ÉK-irányított poliomínóról. A Szerző azt is bizonyította,

	[1]	[2]	[4]	[5]	[6]	[7]
I.	•					
II.		•				
III.		•	•			
IV.		•	•	•		
V.					•	
VI.						•

4. táblázat. A tézispontok és a Szerző publikációinak viszonya

hogy bármilyen más irányú konvexitás feltételezése estén előfordulhat, hogy exponenciálisan sok megoldás lesz ugyanazokkal a horizontális és vertikális vetületekkel.

- II.) A Szerző kidolgozott egy $O(mn \cdot \min\{m^2, n^2\})$ legrosszabb futási idejű algoritmust, mely a horizontális és vertikális vetületekből rekonstruálja az összes azokkal a vetületekkel rendelkező olyan Q-konvex halmazt, melynek legalább két komponense van. Az algoritmus az adott feladat összes megoldását megtalálja.
- III.) A Szerző megmutatta, hogy a hv -konvex 8-összefüggő halmazok részosztályát képezik a Q-konvex halmazok osztályának. Összehasonlítva az általa kidolgozott algoritmust a korábban publikáltakkal azt találta, hogy a hv -konvex 8-összefüggő halmazok osztályán az nemcsak a legrosszabb eset, de az átlagos futási idő tekintetében is gyorsabb a korábbiaknál. Ezen kívül a Szerző azt is megmutatta, hogy a Q-konvex, de nem 8-összefüggő halmazok esetén a rekonstrukció a horizontális és vertikális vetületekből $O(mn)$ időben megoldható és a lehetséges megoldások száma legfeljebb kettő.
- IV.) A Szerző bevezette a felbontható diszkrét halmazok osztályát és egy olyan polinomiális futási idejű rekonstrukciós algoritmust adott erre az osztályra, mely négy vetületet használ. Megvizsgálta a kapcsolatot a felbontható és a Q-konvex halmazok osztályai között és összegezte az ebből a kapcsolatból adódó következményeket néhány jól ismert halmazosztály rekonstrukciós bonyolultságára vonatkozólag, amennyiben a rekonstrukció során négy vetület használható.
- V.) A szerző megvizsgálta, hogyan terjeszthető ki a négy vetületet használó rekonstrukciós technika a hv -konvex halmazok osztályra. Ezek alapján kidolgozott egy gyors és pontos heurisztikát olyan diszkrét halmazok négy vetületből történő rekonstruálására, melyek hv -konvexek és a komponenseik úgy nevezett felbontható konfigurációt alkotnak.
- VI.) Egzakt vagy heurisztikus rekonstrukciós algoritmusok hatékonyságát gyakran tesztelik a hv -konvex osztályon. A Szerző bemutatott egy eljárást, mellyel ennek az osztálynak az elemei egyenletes eloszlás szerint generálhatók. Ezen eljárás segítségével a különböző rekonstrukciós algoritmusok pontosan összemérhetővé válnak az átlagos futási idő tekintetében. A Szerző néhány fontos statisztikát is ismertetett a hv -konvex halmazosztályra vonatkozólag, melyek összefüggésben állnak a rekonstrukció nehézségével. Az ismertetett generáló metódus könnyen kiterjeszthető számos olyan diszkrét halmazokat tartalmazó osztályra, melyek elemeinek komponensei diszjunktak.

Hivatkozások

- [1] P. Balázs, The number of line-convex directed polyominoes having the same orthogonal projections, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **4245** (2006) 77–85.
- [2] P. Balázs, Decomposition algorithms for reconstructing discrete sets with disjoint components, In [15], pp. 153–174 (2007).
- [3] P. Balázs, E. Balogh, A. Kuba, A fast algorithm for reconstructing hv -convex 8-connected but not 4-connected discrete sets, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **2886** (2003) 388–397.
- [4] P. Balázs, E. Balogh, A. Kuba, Reconstruction of 8-connected but not 4-connected hv -convex discrete sets, *Disc. Appl. Math.* **147** (2005) 149–168.
- [5] P. Balázs, A decomposition technique for reconstructing discrete sets from four projections, *Image and Vision Computing*, in press.
- [6] P. Balázs, On the ambiguity of reconstructing hv -convex binary matrices with decomposable configurations, *Acta Cybernetica*, accepted.
- [7] P. Balázs, Generation and empirical investigation of hv -convex discrete sets, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **4522** (2007) 344–353.
- [8] P. Balázs, Reconstruction of decomposable discrete sets from four projections, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **3429** (2005) 104–114.
- [9] P. Balázs, Reconstruction of discrete sets from four projections: strong decomposability, *Elec. Notes in Discrete Math.* **20** (2005) 329–345.
- [10] E. Balogh, A. Kuba, Cs. Dévényi, A. Del Lungo, Comparison of algorithms for reconstructing hv -convex discrete sets, *Lin. Alg. Appl.* **339** (2001) 23–35.
- [11] S. Brunetti, A. Daurat, A. Kuba, Fast filling operations used in the reconstruction of convex lattice sets, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **4245** (2006) 98–109.
- [12] A. Del Lungo, Polyominoes defined by two vectors, *Theor. Comput. Sci.* **127** (1994) 187–198.
- [13] I. Gessel, On the number of convex polyominoes, *Ann. Sci. Math. Québec* **24** (2000) 63–66.
- [14] G.T. Herman, A. Kuba (Eds.), *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [15] G.T. Herman, A. Kuba (Eds.), *Advances in Discrete Tomography and its Applications*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [16] W. Hochstättler, M. Loeb, C. Moll, Generating convex polyominoes at random, *Discrete Math.* **153** (1996) 165–176.
- [17] A. Kuba, E. Balogh, Reconstruction of convex 2D discrete sets in polynomial time, *Theor. Comput. Sci.* **283** (2002) 223–242.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Balázs Péter Ph.D-fokozatra pályázó „Binary Tomography Using Geometrical Priors: Uniqueness and Reconstruction Results” című disszertációját. A disszertáció 4. fejezetére, illetve az ahhoz kapcsolódó

P. Balázs, E. Balogh, A. Kuba, A fast algorithm for reconstructing $h\nu$ -convex 8-connected but not 4-connected discrete sets, Lecture Notes in Computer Science, **2886** (2003) 388-397.

P. Balázs, E. Balogh, A. Kuba, Reconstruction of 8-connected but not 4-connected $h\nu$ -convex discrete sets, Discrete Applied Mathematics, **147** (2005) 149-168.

c. publikációkra vonatkozóan kijelentem, hogy a következő eredményekben a pályázó hozzájárulása volt a meghatározó:

A matematikai modell kidolgozása, a rekonstrukciós algoritmus kidolgozása, az S'_8 és Q osztályok kapcsolatának vizsgálata, az átlagos futási idő elemzésére vonatkozó teszt megtervezése.

A következő eredményekhez való hozzájárulásunk oszthatatlan:

Az átlagos futási időre vonatkozó teszt végrehajtása.

Az említett publikációt fokozatszerzésre nem használtam fel és a későbbiekben sem fogom felhasználni.

Budapest, 2007. május 07.

Balogh Emese

