

TÉTELEK A KONVEX GEOMETRIA ÉS  
AZ ANALÍZIS HATÁRÁN

Doktori értekezés tézisei

AMBRUS GERGELY

Témavezető:

DR. FODOR FERENC

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem  
Természettudományi és Informatikai Kar  
Bolyai Intézet  
Geometria Tanszék

Szeged

2010.



## 1. BEVEZETÉS

A disszertációban három problémát vizsgálunk, melyek főleg a megoldásukat inspiráló geometriai intuíción keresztül kapcsolódnak. Bizonyításaink geometriai, kombinatorikus és analitikus eszközöket használnak. Megjegyezzük, hogy a vizsgált területek gyökerei a 20. század első felébe nyúlnak vissza, s így a kutatott kérdések számos szállal kapcsolódnak a diszkrét és konvex geometria különböző területeihez.

Az értekezés az alábbi három publikáción alapszik:

- G. Ambrus, A. Bezdek, F. Fodor, A Helly-type transversal theorem for  $n$ -dimensional unit balls, *Archiv der Mathematik* **86** (2006), no. 5, 470–480.
- G. Ambrus, F. Fodor, A new lower bound on the surface area of a Voronoi polyhedron, *Periodica Mathematica Hungarica* **53** (2006), no. 1-2., 45–58.
- G. Ambrus, K. J. Böröczky, Stability results for the volume of random simplices. Publikálásra benyújtva, *American Journal of Mathematics*. pp. 1–26.

## 2. EGYSÉGGÖMBÖK TRANSZVERZÁLISAI

Az 1. Fejezetben a következő kérdéskörrel foglalkozunk. Legyen  $\mathcal{F}$   $\mathbb{R}^d$ -beli halmazok egy rendszere. Az  $\ell$  az  $\mathcal{F}$  rendszer *transzverzálisa*, ha minden benne levő halmazzal metsz. Az  $\mathcal{F}$  rendszerre *teljesül a  $T$  tulajdonság*, ha van transzverzálisa, és *teljesül rá a  $T(k)$  tulajdonság*, ha bármely legfeljebb  $k$  elemének van transzverzálisa (itt  $k \geq 1$  egész szám).

Az alapkérdés a következő: hogyan tudjuk garantálni a  $T$  tulajdonság teljesülését? Speciálisan, szeretnénk belátni, hogy ha  $\mathcal{F}$ -re teljesül  $T(k)$  (valamely  $k$ -ra), akkor van transzverzálisa is. Ez a felállás ismerős a klasszikus Helly-tételből, mely szerint ha az  $\mathbb{R}^d$ -beli konvex halmazok egy véges rendszerének bármely legfeljebb  $d + 1$  tagja metsző, akkor a rendszer összes tagjának van közös pontja. Tehát a fenti típusú transzverzális eredmények a “0-dimenziós” Helly-tétel “1-dimenziós” általánosításának is tekinthetők.

Az, hogy minden további megszorítás nélkül bizonyítsunk a fenti sémának megfelelő transzverzális eredményt, túl optimista cél. Holmsen és Matoušek eredménye [HM04] mutatja, hogy még olyan tétel sem adható, mely az összes olyan rendszerre igaz, ami egy  $\mathbb{R}^3$ -beli konvex test páronként diszjunkt eltoltjaiból áll.

Az általunk vizsgált szituációban  $\mathcal{F}$  az  $\mathbb{R}^d$ -beli egységgömbök egy rendszere, ahol  $d$  tetszőleges pozitív egész. Az első kapcsolódó eredmény Hadwigerhez köthető [Had56], aki belátta, hogy  $T(d^2)$ -ből következik  $T$  bármely  $\mathbb{R}^d$ -beli gömbök *ritkán elosztott* rendszerére: itt bármely két gömb középpontjának távolsága legalább 2-szer akkora, mint sugaraik összege. Egy másik vonatkozó eredmény szerint, ld. [HKL03] és [CGH05],  $T(11)$ -ből következik  $T$  tetszőleges  $\mathbb{R}^3$ -beli diszjunkt egységgömbökből álló rendszerre.

Az általunk használt feltétel erősebb, mint a diszjunkttság, de gyengébb a Hadwiger-féle kritériumánál; a továbbiakban csak *távolságfeltételként* fogunk rá hivatkozni.

1. TÉTEL. *Legyen  $d \geq 2$ , és  $\mathcal{F}$   $\mathbb{R}^d$ -beli egységgömbök egy rendszere, melyekre teljesül, hogy bármely kettő középpontjának a távolsága legalább  $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ . Ha  $\mathcal{F}$  bármely legfeljebb  $d^2$  elemének létezik közös transzverzálisa, akkor az összes gömbnek is létezik transzverzális egyenese.*

Az [ABF06] cikk publikálása óta tovább folyt a kutatás a témában. Cheong, Goac, Holmsen és Petitjean [CGHP08] az itt alkalmazot-takhoz hasonló módszerekkel bebizonyította, hogy tetszőleges, disz-junkt,  $\mathbb{R}^d$ -beli egységgömbök rendszerére  $T(4d - 1)$  implikálja  $T$ -t.

Az 1. Tétel bizonyítása a következő állításon alapszik. Legyenek  $B_1, \dots, B_m$  diszjunkt  $\mathbb{R}^d$ -beli egységgömbök. Vegyük azon irányított egyeneseket, melyek a  $B_1, \dots, B_m$  gömböket az indexüknek megfelelő sorrendben metszik, és jelölje  $\mathcal{K}(B_1, \dots, B_m)$  ezen egyenesek (egység hosszú) irányvektorainak halmazát.

2. TÉTEL. *Legyen  $\mathcal{F}_d = \{B_1, \dots, B_m\}$  egységgömbök egy olyan rendszere, mely teljesíti a távolságfeltételt. Ekkor  $\mathcal{K}(B_1, \dots, B_m)$  gömbi konvex halmaz.*

Így a problémát egy 3-dimenziós kérdésre redukáljuk, amely hatékonyan kezelhető analitikus módszerekkel. Ezután bebizonyítjuk, hogy ha az egységgömbökből álló  $\mathcal{F}_d$  rendszer teljesíti a távolságfeltételt valamint létezik transzverzálisa, akkor bármely transzverzálisa ugyanabban a sorrendben (vagy a fordítottjában) metszi a gömböket. Ilyen indukált rendezést az  $\mathcal{F}_d$  rendszer egy *geometriai permutációjának* nevezünk. Tehát a távolságfeltételből következik, hogy  $\mathcal{F}_d$ -nek legfeljebb egy geometriai permutációja létezik. Végül, az 1. Tételt a fenti eredmények és a gömbi Helly-tétel segítségével igazoljuk.

### 3. ÚJ KORLÁT AZ ERŐS DODEKAHEDRÁLIS SEJTÉSRE

A 2. Fejezetben az egységgömb-pakolások Voronoi celláinak minimális felszínmértékére vonatkozó alsó korlátot javítjuk.

Az  $\mathbb{R}^3$ -beli egységgömbök egy  $\mathcal{B}$  rendszerét *pakolásnak* nevezzük, ha semelyik két gömbnek nincs közös belső pontja. A legfontosabb kapcsolódó kérdés, hogy mennyire lehet *sűrű* egy gömbpakolás, ahol a

sűrűség alatt a lefedett tér arányát értjük: egy rögzített középpontú gömb sugarát a végtelenbe tartatva, a kapott arányok határértékeként definiáljuk (már ha ez a határérték létezik). Kepler [Kep66] klasszikus sejtése szerint, a 3-dimenziós egységgömbök pakolási sűrűsége  $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74078\dots$ , amelyet egy rácsszerű elrendezéssel érhetünk el. A Kepler-sejtést Hales igazolta [Hal05].

Tekintsünk egy  $\mathcal{B}$  gömbpakolást. Egy  $B$  gömb Voronoi cellája azon pontok halmaza, melyek közelebb vannak  $B$  középpontjához, mint bármelyik másik gömbközepponthoz. Közismert, hogy a Voronoi cellák konvex poliéderek, és esetünkben feltehető, hogy politópok. A Dodekahedrális Sejtés állítása szerint, melyet Fejes Tóth László fogalmazott meg [FT43], egy egységgömb-pakolás tetszőleges Voronoi cellájának térfogata legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos dodekaéder térfogata. Ezt a közelmúltban Hales és McLaughlin igazolták [HM].

Bezdek Károly [Bez00] a Dodekahedrális Sejtést a következőképpen általánosította.

**SEJTÉS** (Erős Dodekahedrális Sejtés). *Egy  $\mathbb{R}^3$ -beli egységgömbpakolás tetszőleges Voronoi cellájának felszíne legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos dodekaéder felszíne: 16.6508\dots*

Mi a következő korlátot adjuk [AF06].

**3. TÉTEL.** *Egy  $\mathbb{R}^3$ -beli egységgömbpakolás tetszőleges Voronoi cellájának felszíne legalább 16.1977\dots*

Jelenleg ez a problémára vonatkozó legjobb alsó korlát. Korábban Bezdek K. és Daróczy-Kiss E. [BDK05] adott alsó becslést D. Muder [Mud88],[Mud93] gondolatmenetének felhasználásával. Mi is ezt az utat követjük.

A bizonyítás alapötlete a következő. A Voronoi cella lapjai által

kifeszített kúpokat (a továbbiakban lapkúpokat) speciális kúpokkal helyettesítjük oly módon, hogy a felület és a térszög aránya nem növekszik. Az így kapott, szűkebb osztályba tartozó konfigurációk közötti optimumot analitikus eszközökkel határozzuk meg.

A 2.2. alfejezetben részletezzük a helyettesítési eljárást. A használt speciális lapkúpok a következőek. A *merőleges körkúp* (RCC) alapja egy körlap, csúcsa pedig az ennek középpontján áthaladó, a kör síkjára merőleges egyenesen helyezkedik el. *Metszett körnek* hívjuk egy körlemez és egy ennek a középpontját tartalmazó szabályos sokszög metszetét. A *merőleges metszett körkúp* (SRCC) pedig olyan kúp, melynek alapja egy metszett kör, csúcsa pedig ismét a kör középpontja fölött helyezkedik el. Az eljárásban elemi helyettesítések sorozatával a lapkúpokat RCC illetve SRCC típusú kúpokkal helyettesítjük. Ezeknek a speciális kúpoknak a felszín-térszög arányát további, egyszerűbben kezelhető függvényekkel approximáljuk.

Végül, a 2.4. alfejezetben a korábbi becslések, valamint egy technikai számolás segítségével meghatározzuk az optimális konfigurációt. Ez 13 egybevágó, valamint egy kisebb térszögű lapból áll. Ezek a lapok azonban nem illeszthetők össze egy politóppá; ez okozza a becslésünk és a sejtett érték közötti eltérést.

#### 4. VÉLETLEN SZIMPLEXEK TÉRFOGATÁRA VONATKOZÓ EGYENLŐTLENSÉGEK STABILITÁSA

A dolgozat 3. fejezetének motivációjául a következő kérdés szolgál. Legyen  $K$  egy  $\mathbb{R}^d$ -beli konvex test. Mi a várható értéke egy  $K$ -beli véletlen szimplex térfogatának? Három modellt vizsgálunk: az elsőnél, a szimplex csúcsait függetlenül, egyenletes eloszlással választjuk  $K$ -ból; a második modellnél, egy csúcs rögzített helyzetben van; míg a harmadiknál, a rögzített csúcs a  $K$  súlypontja,  $\gamma(K)$ . A várható

érték mellett más momentumokat is vizsgálunk, és a mennyiségeket affin invariáns módon mérjük.

DEFINÍCIÓ. Legyen  $K \subset \mathbb{R}^d$  konvex test. Tetszőleges  $n \geq d + 1$  és  $p > 0$  esetén, vezessük be a következő jelölést:

$$\mathbb{E}_n^p(K) = V(K)^{-n-p} \int_K \cdots \int_K V([x_1, \dots, x_n])^p dx_1 \cdots dx_n.$$

Továbbá, valamely rögzített  $x \in \mathbb{R}^d$ -re, legyen

$$\mathbb{E}_x^p(K) = V(K)^{-d-p} \int_K \cdots \int_K V([x, x_1, \dots, x_d])^p dx_1 \cdots dx_d.$$

Abban a speciális esetben, amikor  $x = \gamma(K)$ ,  $\mathbb{E}_x^p(K)$  helyett  $\mathbb{E}_*^p(K)$ -t írunk.

A fent bevezetett mennyiségek számos kapcsolattal rendelkeznek; ezek közé tartozik Sylvester kérdése, a centroid test és a metszési test térfogata, a Legendre-ellipszoid térfogata, a Busemann véletlen szimplex egyenlőtlenség, a Busemann-Petty centroid egyenlőtlenség, s í.t. Ezeket az összefüggéseket a 3.1. alfejezetben tárgyaljuk.

A legérdekesebb kérdés az, hogy mely  $K$  konvex test esetén vétetik fel a fenti mennyiségek minimuma ill. maximuma. Ez a probléma a 20. század elejéről származik, ld. Blaschke [Bla17], [Bla23]. A minimumok esete teljesen megoldott;  $o$  az origót jelöli.

4. TÉTEL. (Blaschke [Bla23], Busemann [Bus53], Groemer [Gro74])  
Tetszőleges  $K \subset \mathbb{R}^d$  konvex test,  $p \geq 1$ , és  $n \geq d + 1$  esetén,

$$\mathbb{E}_o^p(K) \geq \mathbb{E}_o^p(B^d) \quad , \quad \mathbb{E}_*^p(K) \geq \mathbb{E}_*^p(B^d) \quad , \quad \text{és} \quad \mathbb{E}_n^p(K) \geq \mathbb{E}_n^p(B^d).$$

Továbbá,  $\mathbb{E}_o^p(K) = \mathbb{E}_o^p(B^d)$  teljesül pontosan akkor, ha  $K$  egy  $o$ -szimmetrikus ellipszoid, valamint  $\mathbb{E}_*^p(K) = \mathbb{E}_*^p(B^d)$  illetve  $\mathbb{E}_n^p(K) = \mathbb{E}_n^p(B^d)$  pontosan akkor, ha  $K$  ellipszoid.



A maximumok esete sokkal kevésbé ismert. A Szimplex Sejtés szerint tetszőleges  $K \subset \mathbb{R}^d$  konvex test,  $p \geq 1$  és  $n \geq d + 1$  esetén,  $\mathbb{E}_*^p(K) \leq \mathbb{E}_*^p(T^d)$  és  $\mathbb{E}_n^p(K) \leq \mathbb{E}_n^p(T^d)$ , ahol egyenlőség pontosan akkor áll, ha  $K$  szimplex. Ez csak a síkon bizonyított.

5. TÉTEL. ([Bla17],[DL91],[Gia92],[CCG99]) *Tetszőleges  $K \subset \mathbb{R}^2$  konvex lemez,  $n \geq 3$  és  $p \geq 1$  esetén,  $\mathbb{E}_n^p(K) \leq \mathbb{E}_n^p(T^2)$  és  $\mathbb{E}_*^p(K) \leq \mathbb{E}_*^p(T^2)$ . Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha  $K$  háromszög.*

A Szimplex Sejtés fontossága onnan ered, hogy következne belőle a magas dimenziós konvex geometria egyik központi sejtése, a Hipersík Sejtés.

A dolgozat 3. fejezetében a 4. és 5. Tételek stabilitási változatait bizonyítjuk [AB]. Eredményeinket a *Banach-Mazur távolság* segítségével fogalmazzuk meg: a  $K$  és  $M$  konvex testek Banach-Mazur távolsága  $\delta_{\text{BM}}(K, M) = \min\{\lambda \geq 1 : K - x \subset \Phi(M - y) \subset \lambda(K - x)\}$ , ahol  $\Phi$  a  $\text{GL}_d$ -n, míg  $x, y$  az  $\mathbb{R}^d$ -n fut végig. Eredményeink a következőek.

6. TÉTEL. *Ha a  $K \subset \mathbb{R}^d$  konvex testre  $\delta_{\text{BM}}(K, B^d) = 1 + \delta$  valamely  $\delta > 0$ -val, akkor tetszőleges  $p \geq 1$  esetén,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_*^p(K) &\geq (1 + \gamma^p \delta^{d+3}) \mathbb{E}_o^p(B^d) \\ \mathbb{E}_{d+1}^p(K) &\geq (1 + \gamma^p \delta^{d+3}) \mathbb{E}_{d+1}^p(B^d),\end{aligned}$$

ahol a  $\gamma > 0$  konstans egyedül  $d$ -től függ. Továbbá, ha  $K$  centrálszimmetrikus, akkor a hibtag  $\gamma^p \delta^{(d+3)/2}$ -ra cserélhető.

7. TÉTEL. *Legyen  $K$  konvex lemez, melyre  $\delta_{\text{BM}}(K, T^2) = 1 + \delta$  valamely  $\delta > 0$ -val. Ekkor tetszőleges  $p \geq 1$ -re,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_*^p(K) &\leq (1 - c^p \delta^2) \mathbb{E}_*^p(T^2) \\ \mathbb{E}_3^p(K) &\leq (1 - c^p \delta^2) \mathbb{E}_3^p(T^2),\end{aligned}$$

ahol  $c$  egy pozitív abszolút konstans. A becslések aszimptotikusan élesek, ha  $\delta \rightarrow 0$ .

A 6. Tétel bizonyításánál először feltesszük, hogy  $K$  centrálszimmetrikus konvex test, amely John pozícióban van, azaz a bele írható legnagyobb térfogatú ellipszoid az egységgömb. Fő lemmánk segítségével azt becsüljük, hogy mennyit változnak a kérdéses mennyiségek egy megfelelően választott Steiner szimmetrizáció elvégzésekor. Az általános eredményt ezután Böröczky Károly [Bör] egy tételét felhasználva kapjuk, mely becslést ad egy  $K$  konvex test, és egy,  $K$ -ból Steiner szimmetrizáltak határértékeként kapott szimmetrikus test Banach-Mazur távolságára. Megjegyezzük, hogy a 6. Tétel becslése aszimptotikusan közel optimális: a 3.4. alfejezetben közölt példa esetén a hibatag  $\varepsilon^{(d+1)/2}$  nagyságrendű.

A 7. Tételt a lineáris árnyék-rendszerek technikájának segítségével bizonyítjuk, melyet Campi, Colesanti és Gronchi [CCG99] vezetett be. Ez a “shaking” technika egyfajta általánosítása. Feltesszük, hogy a  $K$ -ba írható maximális területű háromszög szabályos, majd a problémát legfeljebb 6 csúcsú poligonok esetére redukáljuk. A fő nehézséget ezeknek a poligonoknak a további módosítása jelenti, amelyhez elemi árnyék-rendszereket használunk. A kívánt becsléshez egy technikai jellegű számolással jutunk.

A fejezetet a Petty vetítési egyenlőtlenség stabilitási változatának bizonyításával zárjuk.

## HIVATKOZÁSOK

- [AB] G. Ambrus and K. J. Böröczky. Stability results for the volume of random simplices. *Submitted to the American Journal of Mathematics*.
- [ABF06] G. Ambrus, A. Bezdek, and F. Fodor. A Helly-type transversal theorem for  $n$ -dimensional unit balls. *Arch. Math. (Basel)*, 86(5):470–480, 2006.
- [AF06] G. Ambrus and F. Fodor. A new lower bound on the surface area of a Voronoi polyhedron. *Period. Math. Hungar.*, 53(1-2):45–58, 2006.
- [BDK05] Károly Bezdek and Endre Daróczy-Kiss. Finding the best face on a Voronoi polyhedron—the strong dodecahedral conjecture revisited. *Monatsh. Math.*, 145(3):191–206, 2005.
- [Bez00] Károly Bezdek. On a stronger form of Rogers’s lemma and the minimum surface area of Voronoi cells in unit ball packings. *J. Reine Angew. Math.*, 518:131–143, 2000.
- [Bla17] W. Blaschke. Über affine Geometrie IX: Verschiedene Bemerkungen und Aufgaben. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.–Phys. Kl.*, 69:412–420, 1917.
- [Bla23] W. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie II: Affine Differentialgeometrie*. Springer, Berlin, 1923.
- [Bör] K.J. Böröczky. Stability of the Blaschke-Santaló and the affine isoperimetric inequality. *Adv. Math.* Accepted.
- [Bus53] Herbert Busemann. Volume in terms of concurrent cross-sections. *Pacific J. Math.*, 3:1–12, 1953.
- [CCG99] Stefano Campi, Andrea Colesanti, and Paolo Gronchi. A note on Sylvester’s problem for random polytopes in a convex body. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 31(1-2):79–94, 1999.

- [CGH05] Otfried Cheong, Xavier Goaoc, and Andreas Holmsen. Hadwiger and Helly-type theorems for disjoint unit spheres in  $\mathbb{R}^3$ . In *Computational Geometry (SCG'05)*, pages 10–15. ACM, New York, 2005.
- [CGHP08] Otfried Cheong, Xavier Goaoc, Andreas Holmsen, and Sylvain Petitjean. Helly-type theorems for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete Comput. Geom.*, 39(1-3):194–212, 2008.
- [DL91] L. Dalla and D. G. Larman. Volumes of a random polytope in a convex set. In *Applied geometry and discrete mathematics*, volume 4 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 175–180. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [FT43] L. Fejes Tóth. Über die dichteste Kugellagerung. *Math. Z.*, 48:676–684, 1943.
- [Gia92] Apostolos A. Giannopoulos. On the mean value of the area of a random polygon in a plane convex body. *Mathematika*, 39(2):279–290, 1992.
- [Gro74] H. Groemer. On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set. *Arch. Math. (Basel)*, 25:86–90, 1974.
- [Had56] H. Hadwiger. Problem 107. *Nieuw Arch. Wiskunde*, 3(4):57, 1956. Solution: *Wiskundige Opgaven 20 (1957)*, 27–29.
- [Hal05] Thomas C. Hales. A proof of the Kepler conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 162(3):1065–1185, 2005.
- [HKL03] Andreas Holmsen, Meir Katchalski, and Ted Lewis. A Helly-type theorem for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete Comput. Geom.*, 29(4):595–602, 2003.
- [HM] T. C. Hales and S. McLaughlin. A proof of the dodecahedral conjecture. <http://arXive:math.MG/9811079>.
- [HM04] Andreas Holmsen and Jiří Matoušek. No Helly theorem for stabbing translates by lines in  $\mathbb{R}^3$ . *Discrete Comput. Geom.*, 31(3):405–410, 2004.
- [Kep66] J. Kepler. *Strena seu de nive sexangula*. Tampach, Frankfurt, 1611. In English: *The Six-Cornered Snowflake*, Oxford, 1966.
- [Mud88] Douglas J. Muder. Putting the best face on a Voronoï polyhedron. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 56(2):329–348, 1988.
- [Mud93] Douglas J. Muder. A new bound on the local density of sphere packings. *Discrete Comput. Geom.*, 10(4):351–375, 1993.