Tételek a konvex geometria és az analízis határán

Doktori értekezés tézisei

Ambrus Gergely

Témavezető:

Dr. Fodor Ferenc

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Szeged
2010.

1. Bevezetés

A disszertációban három problémát vizsgálunk, melyek főleg a megoldásukat inspiráló geometriai intuíción keresztül kapcsolódnak. Bizonyításaink geometriai, kombinatorikus és analitikus eszközöket használnak. Megjegyezzük, hogy a vizsgált területek gyökerei a 20. század első felébe nyúlnak vissza, s így a kutatott kérdések számos szállal kapcsolódnak a diszkrét és konvex geometria különböző területeihez.

Az értekezés az alábbi három publikáción alapszik:

- G. Ambrus, A. Bezdek, F. Fodor, A Helly-type transversal theorem for n-dimensional unit balls, *Archiv der Mathematik* **86** (2006), no. 5, 470–480.
- G. Ambrus, F. Fodor, A new lower bound on the surface area of a Voronoi polyhedron, *Periodica Mathematica Hungarica* **53** (2006), no. 1-2., 45–58.
- G. Ambrus, K. J. Böröczky, Stability results for the volume of random simplices. Publikálásra benyújtva, *American Journal of Mathematics*. pp. 1–26.

2. Egységgömbök transzverzálisai

Az 1. Fejezetben a következő kérdéskörrel foglalkozunk. Legyen $\mathcal{F}$ $\mathbb{R}^d$-beli halmazok egy rendszere. Az ℓ az $\mathcal{F}$ rendszer *transzverzálisa*, ha minden benne levő halmazt metsz. Az $\mathcal{F}$ rendszerre *teljesül a T tulajdonság*, ha van transzverzálisa, és *teljesül rá a $T(k)$ tulajdonság*, ha bármely legfeljebb k elemének van transzverzálisa (itt $k \geqslant 1$ egész szám).

Az alapkérdés a következő: hogyan tudjuk garantálni a T tulajdonság teljesülését? Speciálisan, szeretnénk belátni, hogy ha $\mathcal{F}$-re teljesül $T(k)$ (valamely k-ra), akkor van transzverzálisa is. Ez a felállás ismerős a klasszikus Helly-tételből, mely szerint ha az $\mathbb{R}^d$-beli konvex halmazok egy véges rendszerének bármely legfeljebb $d+1$ tagja metsző, akkor a rendszer összes tagjának van közös pontja. Tehát a fenti típusú transzverzális eredmények a "0-dimenziós" Helly-tétel "1-dimenziós" általánosításának is tekinthetők.

Az, hogy minden további megszorítás nélkül bizonyítsunk a fenti sémának megfelelő transzverzális eredményt, túl optimista cél. Holmsen és Matoušek eredménye [HM04] mutatja, hogy még olyan tétel sem adható, mely az összes olyan rendszerre igaz, ami egy R^3-beli konvex test páronként diszjunkt eltoltjaiból áll.

Az általunk vizsgált szituációban $\mathcal{F}$ az $\mathbb{R}^d$-beli egységgömbök egy rendszere, ahol d tetszőleges pozitív egész. Az első kapcsolódó eredmény Hadwigerhez köthető [Had56], aki belátta, hogy $T(d^2)$-ből következik T bármely $\mathbb{R}^d$-beli gömbök *ritkán elosztott* rendszerére: itt bármely két gömb középpontjának távolsága legalább 2-szer akkora, mint sugaraik összege. Egy másik vonatkozó eredmény szerint, ld. [HKL03] és [CGH05], $T(11)$-ből következik T tetszőleges $\mathbb{R}^3$-beli diszjunkt egységgömbökből álló rendszerre.

Az általunk használt feltétel erősebb, mint a diszjunktság, de gyengébb a Hadwiger-féle kritériumánál; a továbbiakban csak *távolságfeltételként* fogunk rá hivatkozni.

1. Tétel. *Legyen $d \geqslant 2$, és $\mathcal{F}$ $\mathbb{R}^d$-beli egységgömbök egy rendszere, melyekre teljesül, hogy bármely kettő középpontjának a távolsága legalább $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Ha $\mathcal{F}$ bármely legfeljebb d^2 elemének létezik közös transzverzálisa, akkor az összes gömbnek is létezik transzverzális egyenese.*

Az [ABF06] cikk publikálása óta tovább folyt a kutatás a témában. Cheong, Goaoc, Holmsen és Petitjean [CGHP08] az itt alkalmazottakhoz hasonló módszerekkel bebizonyította, hogy tetszőleges, diszjunkt, $\mathbb{R}^d$-beli egységgömbök rendszerére $T(4d-1)$ implikálja T-t.

Az 1. Tétel bizonyítása a következő állításon alapszik. Legyenek $B_1, \ldots, B_m$ diszjunkt $\mathbb{R}^d$-beli egységgömbök. Vegyük azon irányított egyeneseket, melyek a $B_1, \ldots, B_m$ gömböket az indexüknek megfelelő sorrendben metszik, és jelölje $\mathcal{K}(B_1, \ldots, B_m)$ ezen egyenesek (egység hosszú) irányvektorainak halmazát.

2. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}_d = \{B_1, \ldots, B_m\}$ egységgömbök egy olyan rendszere, mely teljesíti a távolságfeltételt. Ekkor $\mathcal{K}(B_1, \ldots, B_m)$ gömbi konvex halmaz.*

Így a problémát egy 3-dimenziós kérdésre redukáljuk, amely hatékonyan kezelhető analitikus módszerekkel. Ezután bebizonyítjuk, hogy ha az egységgömbökből álló $\mathcal{F}_d$ rendszer teljesíti a távolságfeltételt valamint létezik transzverzálisa, akkor bármely transzverzálisa ugyanabban a sorrendben (vagy a fordítottjában) metszi a gömböket. Ilyen indukált rendezést az $\mathcal{F}_d$ rendszer egy *geometriai permutációjának* nevezünk. Tehát a távolságfeltételből következik, hogy $\mathcal{F}_d$-nek legfeljebb egy geometriai permutációja létezik. Végül, az 1. Tételt a fenti eredmények és a gömbi Helly-tétel segítségével igazoljuk.

3. Új korlát az Erős Dodekahedrális Sejtésre

A 2. Fejezetben az egységgömb-pakolások Voronoi celláinak minimális felszínmértékére vonatkozó alsó korlátot javítjuk.

Az $\mathbb{R}^3$-beli egységgömbök egy $\mathcal{B}$ rendszerét *pakolásnak* nevezzük, ha semelyik két gömbnek nincs közös belső pontja. A legfontosabb kapcsolódó kérdés, hogy mennyire lehet *sűrű* egy gömbpakolás, ahol a sűrűség alatt a lefedett tér arányát érjtük: egy rögzített középpontú gömb sugarát a végtelenbe tartatva, a kapott arányok határértékeként definiáljuk (már ha ez a határérték létezik). Kepler [Kep66] klasszikus sejtése szerint, a 3-dimenziós egységgömbök pakolási sűrűsége $\pi/\sqrt{18} \approx 0.74078\ldots$, amelyet egy rácsszerű elrendezéssel érhetünk el. A Kepler-sejtést Hales igazolta [Hal05].

Tekintsünk egy $\mathcal{B}$ gömbpakolást. Egy B gömb Voronoi cellája azon pontok halmaza, melyek közelebb vannak B középpontjához, mint bármelyik másik gömbközépponthoz. Közismert, hogy a Voronoi cellák konvex poliéderek, és esetünkben feltehető, hogy politópok. A Dodekahedrális Sejtés állítása szerint, melyet Fejes Tóth László fogalmazott meg [FT43], egy egységgömb-pakolás tetszőleges Voronoi cellájának térfogata legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos dodekaéder térfogata. Ezt a közelmúltban Hales és McLaughlin igazolták [HM].

Bezdek Károly [Bez00] a Dodekahedrális Sejtést a következőképpen általánosította.

Sejtés (Erős Dodekahedrális Sejtés). *Egy $\mathbb{R}^3$-beli egységgömbpakolás tetszőleges Voroni cellájának felszíne legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos dodekaéder felszíne:* $16.6508\ldots$.

Mi a következő korlátot adjuk [AF06].

3. Tétel. *Egy $\mathbb{R}^3$-beli egységgömbpakolás tetszőleges Voroni cellájának felszíne legalább* $16.1977\ldots$.

Jelenleg ez a problémára vonatkozó legjobb alsó korlát. Korábban Bezdek K. és Daróczy-Kiss E. [BDK05] adott alsó becslést D. Muder [Mud88],[Mud93] gondolatmenetének felhasználásával. Mi is ezt az utat követjük.

A bizonyítás alapötlete a következő. A Voronoi cella lapjai által kifeszített kúpokat (a továbbiakban lapkúpokat) speciális kúpokkal helyettesítjük oly módon, hogy a felület és a térszög aránya nem növekszik. Az így kapott, szűkebb osztályba tartozó konfigurációk közötti optimumot analitikus eszközökkel határozzuk meg.

A 2.2. alfejezetben részletezzük a helyettesítési eljárást. A használt speciális lapkúpok a következőek. A *merőleges körkúp* (RCC) alapja egy körlap, csúcsa pedig az ennek középpontján áthaladó, a kör síkjára merőleges egyenesen helyezkedik el. *Metszett körnek* hívjuk egy körlemez és egy ennek a középpontját tartalmazó szabályos sokszög metszetét. A *merőleges metszett körkúp* (SRCC) pedig olyan kúp, melynek alapja egy metszett kör, csúcsa pedig ismét a kör középpontja fölött helyezkedik el. Az eljárásban elemi helyettesítések sorozatával a lapkúpokat RCC illetve SRCC típusú kúpokkal helyettesítjük. Ezeknek a speciális kúpoknak a felszín-térszög arányát további, egyszerűbben kezelhető függvényekkel approximáljuk.

Végül, a 2.4. alfejezetben a korábbi becslések, valamint egy technikai számolás segítségével meghatározzuk az optimális konfigurációt. Ez 13 egybevágó, valamint egy kisebb térszögű lapból áll. Ezek a lapok azonban nem illeszthetőek össze egy politóppá; ez okozza a becslésünk és a sejtett érték közötti eltérést.

4. Véletlen szimplexek térfogatára vonatkozó egyenlőtlenségek stabilitása

A dolgozat 3. fejezetének motivációjául a következő kérdés szolgál. Legyen K egy $\mathbb{R}^d$-beli konvex test. Mi a várható értéke egy K-beli véletlen szimplex térfogatának? Három modellt vizsgálunk: az elsőnél, a szimplex csúcsait függetlenül, egyenletes eloszlással választjuk K-ból; a második modellnél, egy csúcs rögzített helyzetben van; míg a harmadiknál, a rögzített csúcs a K súlypontja, $\gamma(K)$. A várható érték mellett más momentumokat is vizsgálunk, és a mennyiségeket affin invariáns módon mérjük.

Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test. Tetszőleges $n \geqslant d+1$ és $p > 0$ esetén, vezessük be a következő jelölést:*

$$\mathbb{E}_n^p(K) = V(K)^{-n-p} \int_K \dots \int_K V([x_1, \dots, x_n])^p \, dx_1 \dots dx_n.$$

Továbbá, valamely rögzített $x \in \mathbb{R}^d$-re, legyen

$$\mathbb{E}_x^p(K) = V(K)^{-d-p} \int_K \dots \int_K V([x, x_1, \dots, x_d])^p \, dx_1 \dots dx_d.$$

Abban a speciális esetben, amikor $x = \gamma(K)$, $\mathbb{E}_x^p(K)$ helyett $\mathbb{E}_*^p(K)$-t írunk.

A fent bevezetett mennyiségek számos kapcsolattal rendelkeznek; ezek közé tartozik Sylvester kérdése, a centroid test és a metszési test térfogata, a Legendre-ellipszoid térfogata, a Busemann véletlen szimplex egyenlőtlenség, a Busemann-Petty centroid egyenlőtlenség, s í.t. Ezeket az összefüggéseket a 3.1. alfejezetben tárgyaljuk.

A legérdekesebb kérdés az, hogy mely K konvex test esetén vétetik fel a fenti mennyiségek minimuma ill. maximuma. Ez a probléma a 20. század elejéről származik, ld. Blaschke [Bla17], [Bla23]. A minimumok esete teljesen megoldott; o az origót jelöli.

4. Tétel. (Blaschke [Bla23], Busemann [Bus53], Groemer[Gro74]) *Tetszőleges $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, $p \geqslant 1$, és $n \geqslant d+1$ esetén,*

$$\mathbb{E}_o^p(K) \geqslant \mathbb{E}_o^p(B^d) \quad , \quad \mathbb{E}_*^p(K) \geqslant \mathbb{E}_*^p(B^d) \quad , \text{ és } \; \mathbb{E}_n^p(K) \geqslant \mathbb{E}_n^p(B^d).$$

Továbbá, $\mathbb{E}_o^p(K) = \mathbb{E}_o^p(B^d)$ teljesül pontosan akkor, ha K egy o-szimmetrikus ellipszoid, valamint $\mathbb{E}_*^p(K) = \mathbb{E}_*^p(B^d)$ illetve $\mathbb{E}_n^p(K) = \mathbb{E}_n^p(B^d)$ pontosan akkor, ha K ellipszoid.

A maximumok esete sokkal kevésbé ismert. A Szimplex Sejtés szerint tetszőleges $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, $p \geqslant 1$ és $n \geqslant d+1$ esetén, $\mathbb{E}_*^p(K) \leqslant \mathbb{E}_*^p(T^d)$ és $\mathbb{E}_n^p(K) \leqslant \mathbb{E}_n^p(T^d)$, ahol egyenlőség pontosan akkor áll, ha K szimplex. Ez csak a síkon bizonyított.

5. Tétel. ([Bla17],[DL91],[Gia92],[CCG99]) *Tetszőleges $K \subset \mathbb{R}^2$ konvex lemez, $n \geqslant 3$ és $p \geqslant 1$ esetén, $\mathbb{E}_n^p(K) \leqslant \mathbb{E}_n^p(T^2)$ és $\mathbb{E}_*^p(K) \leqslant \mathbb{E}_*^p(T^2)$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K háromszög.*

A Szimplex Sejtés fontossága onnan ered, hogy következne belőle a magas dimenziós konvex geometria egyik központi sejtése, a Hipersík Sejtés.

A dolgozat 3. fejezetében a 4. és 5. Tételek stabilitási változatait bizonyítjuk [AB]. Eredményeinket a *Banach-Mazur távolság* segítségével fogalmazzuk meg: a K és M konvex testek Banach-Mazur távolsága $\delta_{\rm BM}(K,M) = \min\{\lambda \geqslant 1 : K - x \subset \Phi(M-y) \subset \lambda(K-x)\}$, ahol Φ a GL_d-n, míg x, y az $\mathbb{R}^d$-n fut végig. Eredményeink a következőek.

6. Tétel. *Ha a $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex testre $\delta_{\rm BM}(K, B^d) = 1 + \delta$ valamely $\delta > 0$-val, akkor tetszőleges $p \geqslant 1$ esetén,*

$$\mathbb{E}_*^p(K) \geqslant (1 + \gamma^p \delta^{d+3}) \mathbb{E}_o^p(B^d)$$
$$\mathbb{E}_{d+1}^p(K) \geqslant (1 + \gamma^p \delta^{d+3}) \mathbb{E}_{d+1}^p(B^d),$$

ahol a $\gamma > 0$ konstans egyedül d-től függ. Továbbá, ha K centrálszimmetrikus, akkor a hibatag $\gamma^p \delta^{(d+3)/2}$-ra cserélhető.

7. Tétel. *Legyen K konvex lemez, melyre $\delta_{\rm BM}(K, T^2) = 1 + \delta$ valamely $\delta > 0$-val. Ekkor tetszőleges $p \geqslant 1$-re,*

$$\mathbb{E}_*^p(K) \leqslant (1 - c^p \delta^2) \mathbb{E}_*^p(T^2)$$
$$\mathbb{E}_3^p(K) \leqslant (1 - c^p \delta^2) \mathbb{E}_3^p(T^2),$$

ahol c egy pozitív abszolút konstans. A becslések aszimptotikusan élesek, ha $\delta \to 0$.

A 6. Tétel bizonyításánál először feltesszük, hogy K centrálszimmetrikus konvex test, amely John pozícióban van, azaz a bele írható legnagyobb térfogatú ellipszoid az egységgömb. Fő lemmánk segítségével azt becsüljük, hogy mennyit változnak a kérdéses mennyiségek egy megfelelően választott Steiner szimmetrizáció elvégzésekor. Az általános eredményt ezután Böröczky Károly [Bör] egy tételét felhasználva kapjuk, mely becslést ad egy K konvex test, és egy, K-ból Steiner szimmetrizáltak határértékeként kapott szimmetrikus test Banach-Mazur távolságára. Megjegyezzük, hogy a 6. Tétel becslése aszimptotikusan közel optimális: a 3.4. alfejezetben közölt példa esetén a hibatag $\varepsilon^{(d+1)/2}$ nagyságrendű.

A 7. Tételt a lineáris árnyék-rendszerek technikájának segítségével bizonyítjuk, melyet Campi, Colesanti és Gronchi [CCG99] vezetett be. Ez a "shaking" technika egyfajta általánosítása. Feltesszük, hogy a K-ba írható maximális területű háromszög szabályos, majd a problémát legfeljebb 6 csúcsú poligonok esetére redukáljuk. A fő nehézséget ezeknek a poligonoknak a további módosítása jelenti, amelyhez elemi árnyék-rendszereket használunk. A kívánt becsléshez egy technikai jellegű számolással jutunk.

A fejezetet a Petty vetítési egyenlőtlenség stabilitási változatának bizonyításával zárjuk.

Hivatkozások

[AB] G. Ambrus and K. J. Böröczky. Stability results for the volume of random simplices. *Submitted to the American Journal of Mathematics.*

[ABF06] G. Ambrus, A. Bezdek, and F. Fodor. A Helly-type transversal theorem for n-dimensional unit balls. *Arch. Math. (Basel)*, 86(5):470–480, 2006.

[AF06] G. Ambrus and F. Fodor. A new lower bound on the surface area of a Voronoi polyhedron. *Period. Math. Hungar.*, 53(1-2):45–58, 2006.

[BDK05] Károly Bezdek and Endre Daróczy-Kiss. Finding the best face on a Voronoi polyhedron—the strong dodecahedral conjecture revisited. *Monatsh. Math.*, 145(3):191–206, 2005.

[Bez00] Károly Bezdek. On a stronger form of Rogers's lemma and the minimum surface area of Voronoi cells in unit ball packings. *J. Reine Angew. Math.*, 518:131–143, 2000.

[Bla17] W. Blaschke. Über affine Geometrie IX: Verschiedene Bemerkungen und Aufgaben. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.–Phys. Kl.*, 69:412–420, 1917.

[Bla23] W. Blaschke. *Vorlesungen über Differentialgeometrie II: Affine Differentialgeometrie.* Springer, Berlin, 1923.

[Bör] K.J. Böröczky. Stability of the Blaschke-Santaló and the affine isoperimetric inequality. *Adv. Math.* Accepted.

[Bus53] Herbert Busemann. Volume in terms of concurrent cross-sections. *Pacific J. Math.*, 3:1–12, 1953.

[CCG99] Stefano Campi, Andrea Colesanti, and Paolo Gronchi. A note on Sylvester's problem for random polytopes in a convex body. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 31(1-2):79–94, 1999.

[CGH05] Otfried Cheong, Xavier Goaoc, and Andreas Holmsen. Hadwiger and Helly-type theorems for disjoint unit spheres in $\mathbb{R}^3$. In *Computational Geometry (SCG'05)*, pages 10–15. ACM, New York, 2005.

[CGHP08] Otfried Cheong, Xavier Goaoc, Andreas Holmsen, and Sylvain Petitjean. Helly-type theorems for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete Comput. Geom.*, 39(1-3):194–212, 2008.

[DL91] L. Dalla and D. G. Larman. Volumes of a random polytope in a convex set. In *Applied geometry and discrete mathematics*, volume 4 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 175–180. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[FT43] L. Fejes Tóth. Über die dichteste Kugellagerung. *Math. Z.*, 48:676–684, 1943.

[Gia92] Apostolos A. Giannopoulos. On the mean value of the area of a random polygon in a plane convex body. *Mathematika*, 39(2):279–290, 1992.

[Gro74] H. Groemer. On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set. *Arch. Math. (Basel)*, 25:86–90, 1974.

[Had56] H. Hadwiger. Problem 107. *Nieuw Arch. Wiskunde*, 3(4):57, 1956. Solution: Wiskundige Opgaven 20 (1957), 27–29.

[Hal05] Thomas C. Hales. A proof of the Kepler conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 162(3):1065–1185, 2005.

[HKL03] Andreas Holmsen, Meir Katchalski, and Ted Lewis. A Helly-type theorem for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete Comput. Geom.*, 29(4):595–602, 2003.

[HM] T. C. Hales and S. McLaughlin. A proof of the dodecahedral conjecture. *http://arXive:math.MG/9811079*.

[HM04] Andreas Holmsen and Jiří Matoušek. No Helly theorem for stabbing translates by lines in $\mathbb{R}^3$. *Discrete Comput. Geom.*, 31(3):405–410, 2004.

[Kep66] J. Kepler. *Strena seu de nive sexangula*. Tampach, Frankfurt, 1611. In English: *The Six-Cornered Snowflake*, Oxford, 1966.

[Mud88] Douglas J. Muder. Putting the best face on a Voronoĭ polyhedron. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 56(2):329–348, 1988.

[Mud93] Douglas J. Muder. A new bound on the local density of sphere packings. *Discrete Comput. Geom.*, 10(4):351–375, 1993.