

A FÖLD OPTIMÁLIS TORZULÁSÚ ÁBRÁZOLÁSA PÓLUSPONTOS  
KÉPZETES HENGERVETÜLETBEN, EKVIDISZTÁNS  
PARALLELKÖRÖKKEL

GYÖRFFY JÁNOS<sup>28</sup>

REPRESENTING THE WHOLE EARTH IN A BEST PSEUDOCYLINDRICAL  
PROJECTION WITH POLE POINT AND EQUIDISTANT PARALLELS

**Abstract:** A pseudocylindrical projection with equidistant parallels and showing the Poles as points was prepared for representing the whole Earth. It was constructed by minimization of the mean overall error criterion Airy-Kavrayiskiy. Because of the desired curve form of the meridians, the mapping equation  $x(\varphi, \lambda)$  could not be approximated effectively by polynomials, so a special other function was used. The new projection is form-true, esthetically favourable, its mean and maximal distortions are small, therefore it can be definitely recommended for geocartographical purposes.

A geokartográfia egyes területein, főleg az iskolai és a közismereti, valamint a tematikus atlaszokban – például a klímaelemek globális eloszlásának ábrázolása során, vagy a földtani, növényzeti, talaj-, stb. világtérképeken – gyakran jelenik meg a Föld egy lapon, egyetlen kontúrban (*Keveiné Bárány I.* 1998). Ezt a feladatot Amerika felfedezése után először Waldseemüller (1507) és Rosselli (1508) oldotta meg. Azóta számtalan más megoldás született, melyek egyebek közt az alkalmazott térképvetület tekintetében is különböznek. A vetület helyes megválasztása lényeges kérdés, mert egyrészt ezen keresztül lehet eleget tenni az ókortól ismert hasonlósági elvnek, másrészt csökkenthetők a térkép szempontjából hátrányos torzulások, végül a térkép megjelenését esztétikailag is befolyásolja.

A világtérképekhez a 16. századtól kezdve egyre inkább hengervetületeket használtak. A szélességi körök itt párhuzamos egyenesekként jelennek meg, ami főleg a földrajzi övezetesség (klíma- és növényzeti zónák, talajtípusok, mezőgazdaság) ábrázolása szempontjából előnyös. Ennek a korszaknak a kartográfiájában találkozhatunk Mercator, Ortelius vetületeivel. A 19. század közepétől előtérbe kerül Mollweide területtartó vetülete, a 20. század elejétől pedig Eckert vetületei. Erre az időre alakult ki a térképszerkesztés napjainkig érvényes vetületi repertoárja, amelyben mind a területtartó, mind pedig az általános torzulású (és így a kontinensek alakját jobban megőrző) képzetes hengervetületeknek meg van a maguk alkalmazási területe (*Stegena L.* 1988).

A képzetes hengervetületek körében sajátos kérdéseket vet fel a pólusok és környékük ábrázolása. A pólus, ahol a torzulások egy része végtelen nagygyá válik, vagy egy pontra, vagy egy egyenes szakaszra (az ún. pólusvonalra) képeződik le. A *póluspontos* vetületek a szemléletesség és az esztétikum szempontjából előnyösebb-

---

<sup>28</sup> Eötvös Loránd Tudományegyetem, Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék. 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A. E-mail: terkep1@ludens.elte.hu

bek. A *pólusvonalas* ábrázolás megértése bizonyos absztrakciós készséget kíván, viszont a pólusvonal környékén a torzulások jobban csökkenthetők.

Hasonlítsuk össze az egész Földet ábrázoló térképek vetületeit torzulási szempontból. Ehhez először is ki kell jelölni a térkép témája szempontjából leghatározottabb torzulást, amely lehet a szög-, a terület- vagy a hossztorulás, de leginkább az ezek összességét felölelő ún. teljes torulás. Ennek eldöntése után a vizsgált térkép minden pontjában ki kell számítani az ún. *lokális torzultsági mérőszám* ( $\varepsilon^2$ ) értékét, amelyre a teljes torulás figyelembevételére esetén egy általánosan elfogadott lehetőség:

$$\varepsilon^2_{AK} = 0,5 \cdot \left[ (Ln(a))^2 + (Ln(b))^2 \right]$$

Itt  $a$  az adott pontban fellépő maximális,  $b$  pedig a minimális hossztorulást jelöli, amelyeket a  $h$  parallelkör menti, a  $k$  meridián menti hossztorulásokból és a fokhálózati vonalak által bezárt  $\Theta$  szögből, illetve annak szinuszából határozható meg; a  $h$ ,  $k$  és  $\sin \Theta$  mennyiségek pedig a szóban forgó pont  $\varphi$  szélessége és  $\lambda$  hosszúsága ismeretében a vetületet matematikailag leíró  $x(\varphi, \lambda)$  és  $y(\varphi, \lambda)$  ún. vetületi egyenletekből, másként leképezési függvényekből határozhatók meg (Györffy J. 2004).

Ezt követően az  $\varepsilon^2_{AK}$  értékeket a Föld egészére, pontosabban a  $85^\circ$ D-i és a  $85^\circ$ É-i szélesség közötti gömbövre átlagoljuk az Airy-Kavrajcszkij kritériumnak nevezett alábbi képlettel:

$$E_{AK} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sin 85^\circ} \cdot \int_{-85^\circ}^{85^\circ} \int_{-180^\circ}^{180^\circ} \varepsilon^2_{AK} \cdot \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi}$$

A vizsgált vetületek ezen  $E_{AK}$  érték segítségével összehasonlíthatók torzulási szempontból: azt a vetületet tekintjük kevésbé torzultnak és ezáltal előnyösebbnek, amelynek az Airy-Kavrajcszkij kritérium szerinti átlagos teljes torzultsága kisebb (Györffy J. 2002).

Célunk a fentiek alapján az Airy-Kavrajcszkij kritérium szerinti legjobb póluspontos képzetes hengervetület közelítő meghatározása. Tehát olyan folytonosan differenciálható  $x$  és  $y$  leképezési függvényeket szeretnénk meghatározni, amelyekre teljesülnek a szokásos feltételek, nevezetesen az  $x(\varphi, \lambda)$  függvény legyen  $\lambda$ -ban páratlan és  $\varphi$ -ben páros, az  $y(\varphi)$  függvény pedig, mely a képzetes hengervetületeknél nem függ a  $\lambda$  hosszúságtól, legyen  $\varphi$ -ben páratlan, emellett a meridiánok póluspontba való összefutásához *tetszőleges  $\lambda$ -ra teljesüljön az  $x(-90^\circ, \lambda) = x(90^\circ, \lambda) = 0$  egyenlőség*. Nem várható, hogy egy adott vetülettípushoz tartozó póluspontos változat átlagos teljes torzultsága a pólusvonalasénál kisebb legyen, hiszen a póluspontosság mint többlet-feltétel a közelítés hatékonyságát nem javíthatja. Azonban figyelembe véve, hogy a pólusok  $5^\circ$ -os környezete a torzultságba nem számít bele, ha tudunk konstruálni olyan meridián-íveket, amelyek  $-85^\circ$  és  $+85^\circ$  között nagyjából az optimális pólusvonalas változat meridián-íveivel futnak együtt, és csak azok környékén kanyarodnak be a pólus felé, akkor reménykedhetünk abban, hogy a póluspontos változat is majdnem olyan jó lesz, mint a pólusvonalas. (A kö-

vetülményeknek megfelelő meridián-ívek keresésénél kizárjuk azt a megoldást, amelynél különböző jellegű íveket illesztünk egymáshoz, vagyis a körből kizárjuk az összetett vetületeket).

Kínálkozik az egyszerűnek tűnő megoldás, hogy pólusvonalas vetületek polinom alakban felírt  $x$  vetületi egyenletének  $\cos\varphi$ -vel való beszorzásával alakítsuk át ezeket póluspontossá. Sajnos ez nem vezet eredményre. Egyrészt esztétikailag zavaró, hogy a sarkoknál a  $-180^\circ$ -os és  $+180^\circ$ -os határoló meridiánok nem csatlakoznak simán, így a kontúrvonal itt megtörik. (Ez még kiküszöbölhető lenne, ha  $x$ -et  $\cos\varphi$  helyett a

$$\sqrt{1 - \left( \frac{y(\varphi)}{y(\pi/2)} \right)^2}$$

függvénnyel szoroznánk be.) Ennél nagyobb probléma, hogy az így kapott meridián-ívek nehezen követik az ideális vonalat, amely magasabb szélességen viszonylag éles kanyarral fordul a pólus felé, emiatt az átlagos torzultság csak a közelítő polinom fokszámának számottevő növelésével csökkenthető a lehetséges mértékben. Végül a legkellemetlenebb az a jelenség, hogy a meridián-ívek görbülete nem változik egyenletesen, hanem alig észrevehetően hajladozik, sőt inflexiós pontok is keletkeznek rajta.

A fenti hátrányok kiküszöbölhetők egy olyan, az utóbbi képlet által sugallt megoldással, amelyben az  $x$  vetületi egyenletet

$$x = t_1 \cdot \lambda \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y(\varphi)}{y(\pi/2)} \right)^{t_2} \right]^{t_3}$$

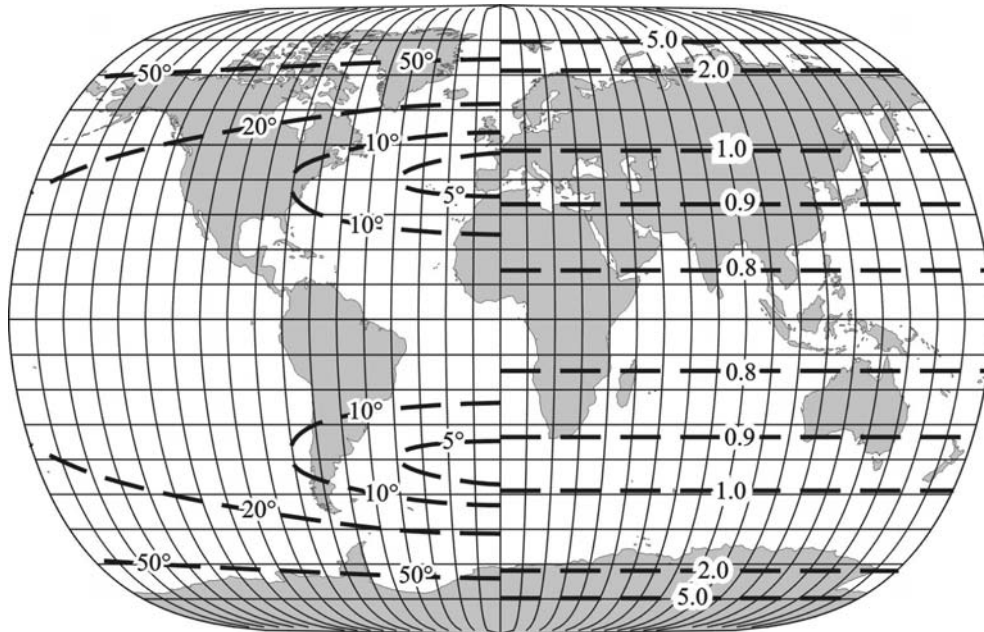
alakban írjuk fel, ahol  $t_1, t_2, t_3$  pozitív konstansok. (Ez a vetület  $t_1=1, t_2=2, t_3=2$  esetén éppen Apianus II. vetületét szolgáltatja). A  $t_2$  megválasztása a meridián-ívek egyenlítő környéki viselkedését, a  $t_3$  megválasztása a pólus környéki viselkedését befolyásolja, végül  $t_2=$  segítségével egy merőleges affinitás (nyújtás vagy zsugorítás) érhető el az  $x$  tengely irányába. A fenti vetületi egyenlet  $\lambda$ -ban lineáris, emiatt az általa előállított vetület paralelkörei mentén a hossztorzulás (szélességenként változó) konstans, következésképpen a paralelkörök – a képzetes hengervetületek túlnyomó többségéhez hasonlóan – egyenközüek. Az  $y$  vetületi egyenletet

$$y = \varphi$$

alakúnak írjuk elő, ami a középmeridián hossztartását jelenti.

A  $t_1, t_2, t_3$  mennyiségeket paramétereknek tekintve, az  $E_{AK}$  egy háromváltozós függvény lesz, amelynek minimumhelyét és minimumát megkereshetjük egy numerikus eljárás segítségével. A szimplex módszer nevű minimumkereső eljárással elvégezve a számításokat, a következő eredményeket kapjuk: ha a paraméterek-

nek a  $t_1=0,78005$ ,  $t_2=1,66459$ ,  $t_3=5,38347$  értéket adjuk, akkor  $E_{AK}=0,2493$ . Összehasonlításképpen megadjuk a megfelelő tulajdonságokkal jellemezhető legjobb pólusvonalas változat legkisebb átlagos torzulását:  $E_{AK}=0,2486$ , ami azt jelenti, hogy 0,3%-os eltéréssel sikerült megközelíteni a lehetséges alsó határt. (Megjegyezzük, hogy ha az  $y$  vetületi egyenletben bevezetnénk egy  $t_4$  szorzót, akkor az  $E_{AK}$  értéke mintegy 0,05%-kal csökkenne, ezért ettől eltekintettünk.)

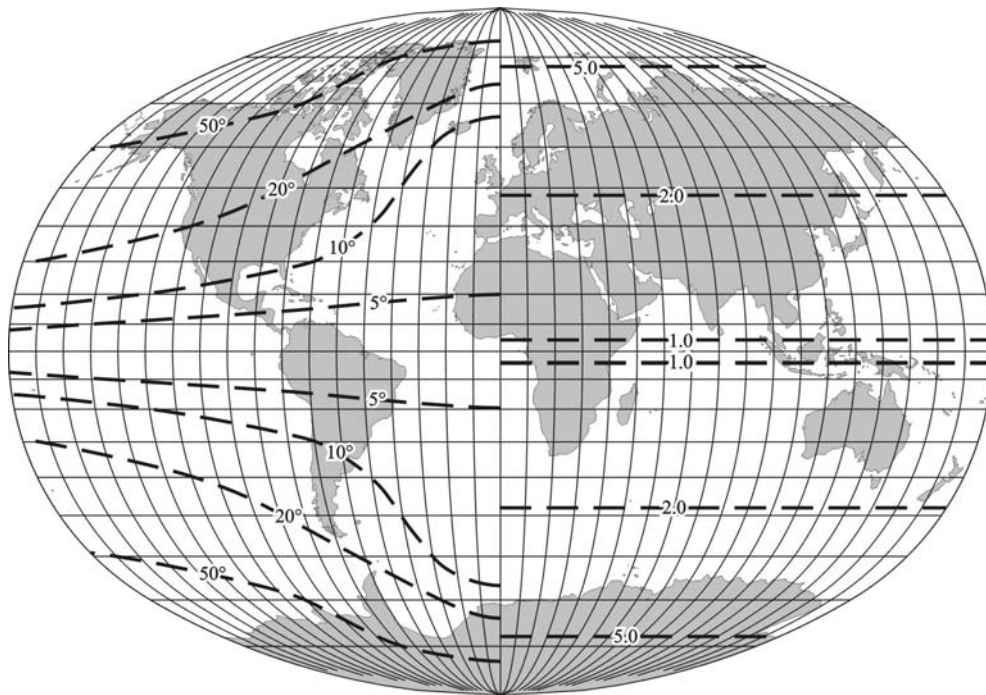


1. ábra A maximális szögtorzulások és a területtorzulások eloszlása a legjobb pólusponos, paralelkörökben ekvidisztáns képzetes hengervetületben

Figure 1 The distribution of the maximum angular deformation and the area distortion in the best pseudocylindrical projection with pole point and equidistant parallels

A Föld képét e vetületben, valamint a vetületi torzulásokat az 1. ábra mutatja be. (A vetület póluspontossága kis méretarány esetén kevésbé feltűnő, mert a meridián-ívek a  $\pm 85^\circ$ -os szélesség közelében gyorsan kanyarodnak a pólus felé, emiatt a határoló meridián közel kerül egy képzeletbeli pólusvonalhoz. Ezen a jelenségen enyhíthetünk, ha az optimalizálási tartományt a szakirodalomban szokásos  $\pm 85^\circ$  közötti gömböv helyett a  $\pm 80^\circ$  közöttivel helyettesítjük.) A maximális szögtorzulás a térkép területének csaknem 2/3-án kisebb  $20^\circ$ -nál, és az  $50^\circ$ -nál nagyobb maximális szögtorzulású rész (a pólusok közvetlen környezete) a terület 10%-át sem éri el. A területtorzulások is viszonylag kedvezőek. Az ábrázolt terület mintegy 60%-án kismértékű területcsökkenés következik be, míg 5,0-nél nagyobb területtorzulási modulust csak a pólusokat tartalmazó  $10^\circ$ -os gömbsüvegen találunk.

Hasonlítsuk össze ezt a vetületet a magyar atlaszokban széles körben alkalmazott Baranyi féle 2. vetülettel (2. ábra) (Baranyi J. – Györffy J. 1990). Baranyi a pólushoz közeledő meridián-ívek görbületének megváltozását gömbövenként különböző  $x(\varphi, \lambda)$  vetületi egyenlet bevezetése árán oldotta meg. A körívekből összeállított ovális kontúrvonal jól érzékelteti a Föld gömbalakját. A hasonlósági elv a kontinensek alakjában kiválóan érvényesül mindkét vetületnél. A teljes Óvilág (Eurázsia és Afrika) alakja a legjobb póluspontos képzetes hengervetület esetén hűbben jelenik meg, ha viszont Ázsiát külön vizsgáljuk, ennek alakja Baranyi vetületénél torzul kevésbé. A maximális szögtorzulások eloszlása a Baranyi vetületnél eltér az előzőétől. Az egyenlítőnél a legkisebbek a torzulások, és innen a pólus felé haladva nőnek, a határoló meridiánon gyorsabban, mint a középmeridiánnál. A területtorzulások eloszlása hasonló; a területcsökkenési zóna az egyenlítőnél egészen keskeny, ellenben a torzulások a pólus felé haladva gyorsabban nőnek. (Megjegyzendő, hogy a Baranyi vetület átlagos torzulását, amely  $E_{AK}=0,3580$ , csökkenthetjük egy 1-nél kisebb hasonlósági transzformációval, és ebben az esetben a területtorzulási izovonalak is közelebb húzódnak a pólusokhoz.)



2. ábra A maximális szögtorzulások és a területtorzulások eloszlása Baranyi 2. vetületében  
Figure 2 The distribution of the maximum angular deformation and the area distortion  
in the Baranyi's 2. projection

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy új, póluspontos képzetes hengervetületünk igen kedvező torzulási tulajdonságokkal rendelkezik, amennyiben a na-

gyobb torzulásokat sikerült a pólusok felé kitolni, alakhűség és esztétikum tekintetében pedig versenyképes Baranyi e tekintetben kiemelkedően jónak tartott 2. vetületével. (Megjegyezzük, hogy torzulásmentes hely egyik vetületben sincs.)

#### IRODALOM

- Baranyi J. – Györffy J.** 1990. A Föld újszerű ábrázolásai a mai magyar atlaszokban. Földrajzi Közlemények 114/3-4. pp. 109-117.
- Györffy J.** 2002. Az egész Föld optimális ábrázolása általános torzulású pólusvonalas képzetes hengervetületben. *Studia Cartologica* 12. Az ELTE Térképtudományi Tanszékének évkönyve, Budapest. (<http://lazarus.elte.hu/hun/digkonyv/sc/sc12/02gyj.pdf>).
- Györffy J.** 2004. Képzetes hengervetületek (oktatási anyag). (<http://mercator.elte.hu/~gyorffy/jegyzete/kepzetes/kepzheng/jegyze10.html>).
- Keveiné Bárány I.** 1998. Talajföldrajz. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Stegená L.** 1988. Vetülettan. Tankönyvkiadó, Budapest.